内容简介

本书是“大学数学的内容、方法与技巧丛书”之一，是学习高等代数课程的一本很好的辅导书．本书编写顺序与一般的高等代数教材同步，内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间、双线性函数与辛空间等高等代数的基本理论与方法．本书在凝炼概念、释疑解难的基础上用大量的篇幅和众多的例题对高等代数的基础理论、基本性质、基本方法和应用进行了推理与演绎，使读者通过本书能更好地理解高等代数的基本概念，掌握高等代数的基本方法，熟悉高等代数的基本技巧．

希望本书能成为您的良师益友，欢迎您选用本系列丛书．

前 言

高等代数是高等学校数学专业的一门主要基础课程，它在承接和扩展中学代数内容的同时，又为学习后续课程——近世代数与抽象代数奠定了理论基础，它对培养读者的抽象思维能力、逻辑思维能力和学习后续课程具有很重要的作用. 高等代数的特点是概念抽象，理论难懂，方法繁多，变化复杂，尤其在解题中，往往会感到证明题难以下手，计算题方法不易统一. 为解决读者学习高等代数中存在的困难，帮助读者理解与思考高等代数的基本概念，掌握与熟练高等代数的基本方法，熟悉与运用高等代数的基本技巧，我们编写了此书，相信能够使读者学有所获.

本书与丛书中其它书籍一样，按章节进行编写，分为多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧几里得空间、双线性函数与辛空间等 10 章. 每节分为主要内容，疑难解析，方法、技巧与典型例题分析三个部分. 主要内容按照北京大学数学系编《高等代数》(第三版)归纳凝炼；疑难解析依据读者在学习中可能产生的问题与教材中不够明确的内容进行分析与阐述；方法、技巧与典型例题分析部分不仅对北京大学数学系编写的《高等代数》教材中的习题作了较完整的解析，还补充了部分习题，以求题型更加完整、方法更加全面、技巧更加凸现. 为了使读者能更好地理解与接受本书的内容，我们采取了循序渐进、突出重点的方式，较详尽、完整地对问题与例题进行了解析与论证，并作了必要的评点与归纳.

本书在编写过程中参阅了同行们的一些著作,同时得到了华中科技大学出版社的大力支持与帮助,在此向他们致以诚挚的感谢.

由于经验不足与学识所限,本书错漏之处在所难免,诚恳希望读者指出以求及时改正.

孙清华

2006 年 2 月

目　　录

第一章　多　项　式

多项式理论是高等代数的一个重要内容，它为高等代数所阐述的内容提供了理论依据. 学好多项式理论，对进一步学习数学理论与实际应用，将起到很大的作用.

第一节　数域与一元多项式

主 要 内 容

1. 定义 1　设 P 是由一些复数组成的集合(其中包括 0 与 1)，如果 P 中任意两个数的和、差、积、商(除数不为零)仍是 P 中的数，则称 P 为一个**数域**.

全体有理数的集合、全体实数的集合、全体复数的集合都是数域，分别用字母 **Q**、**R**、**C** 表示.

所有的数域都包含有理数域.

如果数集 P 中任意两个数作某一运算的结果仍在 P 中，就称数集 P 对这个运算是**封闭的**.

2. 定义 2　对于非负整数 n，形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为数域 $P(a_0,a_1,\cdots,a_n\in P)$ 上 x 的**一元多项式**.

常用 $f(x),g(x),\cdots$ 或 $f,g,\cdots$ 来表示多项式.

3. 定义 3　若在多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中，除去系数为零的项外，同次项的系数全相等，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **相等**，记为 $f(x)=g(x)$.

系数全为零的多项式称为**零多项式**，记为 0，是唯一不定义次数的多项式.

多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\partial(f(x))$.

4. 数域 P 上的两个多项式经过加、减、乘等运算后的结果仍为 P 上的多项式，其运算满足以下规律：

(1) 加法交换律　$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$.

(2) 加法结合律　$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$.

(3) 乘法交换律　$f(x)g(x)=g(x)f(x)$.

(4) 乘法结合律　$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$.

(5) 乘法对加法的分配律

$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

(6) 乘法消去律　若 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$，且 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$. 且有

$$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant \max(\partial(f(x)),\partial(g(x))),$$

$$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x)).$$

5. 定义 4　所有系数在数域 P 中的一元多项式的全体，称为数域 P 上的**一元多项式环**，记为 $P[x]$，P 称为 $P[x]$ 的系数域.

疑难解析

1. 数域与数环有什么不同？试举例说明.

答　从定义可知：在至少含两个数（0 与 1）的数集上，如果任两个数的和、差、积、商（除数不为零）仍属于 P，则 P 是一个数域；如果任两个数的和、差、积仍属于 P，则 P 是一个数环. 显然，数域与数环的区别在于数环对商的运算不封闭. 例如：

(1) $F_1=\{a+b\sqrt{3}\mathrm{i}\mid a,b$ 为任意有理数$\}$ 是数环也是数域. 因为 $0,1\in F_1$. 设

$$a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i},\quad a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i}\in F_1,$$

有 $(a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i})\pm(a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{3}\mathrm{i}\in F_1$,

$(a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i})(a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i})=(a_1a_2-3b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{3}\mathrm{i}\in F_1$,

$$\frac{a_1+b_1\sqrt{3}\mathrm{i}}{a_2+b_2\sqrt{3}\mathrm{i}}=\frac{a_1a_2+3b_1b_2}{a_2^2+3b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+3b_2^2}\sqrt{3}\mathrm{i}\in F_1.$$

(2) $F_2=\{a+bi \mid a,b$ 为任意整数$\}$是数环但不是数域. 因为 $1+2i, 1+3i\in F_2$,有

$$(1+2i)+(1+3i)=2+5i\in F_2,\ (1+2i)-(1+3i)=-i\in F_2,$$

$$(1+2i)\cdot(1+3i)=-5+5i\in F_2,$$

但是
$$\frac{1+2i}{1+3i}=\frac{(1+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{7}{10}-\frac{1}{10}i\notin F_2.$$

可见,若 P 是数域,则 P 必是数环;若 P 是数环,则 P 不一定是数域.

2. 怎样认识一元多项式的表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

的形式性? 有什么意义?

答 应该认识到,一元多项式的表达式中的 x 是一个符号. 当这符号是未知数时,即为初等代数中的多项式. 但这符号也可以表示其它事物,如行列式、矩阵等,因此一元多项式的表达式的形式性,将统一对未知数与其它事物的研究,在引入运算反映各事物运算规律与研究普遍性质上有积极的作用.

方法、技巧与典型例题分析

首先,要对数域的概念有一个明确的了解,能判定一个数集是否为数域或数环,并能证明一些简单的命题.

例 1 设数环 $P\neq\varnothing$,证明 P 为一无限数集.

证 由 $P\neq\varnothing$,故必有 $a\ (a\neq0)\in P$,则

$$a+a=2a\in P,\ a+2a=3a\in P,\ \cdots$$

显然,当 $m\neq n$ 时,$ma\neq na$,所以 P 含无穷多个数,是无限数集.

例 2 设数集 P 至少含有两个数,证明:若 P 中任意两个数的差与商(除数不为零)仍属于 P,则 P 必为数域.

证 只需证 P 对加法与乘法也封闭.

设 $a,b\in P$,则 $a-a=0\in P$. 当 $b\neq0$ 时,$b/b=1\in P$,于是

$$a+b=a-(-b)\in P,\quad ab=a\Big/\frac{1}{b}\in P,$$

所以 P 是一个数域.

例 3 证明:

(1) 在有理数域与实数域之间有无限多个不同的数域;

(2) 在实数域与复数域之间不存在其它数域.

证 (1) 只需证明对于两个不同的质数 p_1 与 p_2,数域

$$P_1=\{a+b\sqrt{p_1}\mid a,b\in\mathbf{Q}\},\quad P_2=\{a+b\sqrt{p_2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$$

不相同.

用反证法.设 $P_1=P_2$,则必有 $\sqrt{p_2}\in P_1$.令 $\sqrt{p_2}=a+b\sqrt{p_1}$,两端平方后,得

$$p_2=a^2+b^2p_1+2ab\sqrt{p_1}.$$

式中 $ab\neq0$(若 a 或 b 等于零,则 $\sqrt{p_2}$ 或 $\sqrt{p_2/p_1}$ 为有理数,这是不可能的).但 $ab\neq0$,又有 $\sqrt{p_1}=(p_2-a^2-b^2p_1)/(2ab)$,即 $\sqrt{p_1}$ 为有理数,这也是不可能的.所以 $P_1\neq P_2$.由于质数有无限多个,因而在有理数域与实数域之间有无限多个形如

$$P=\{a+b\sqrt{p}\mid a,b\in\mathbf{Q},p\text{ 为质数}\}$$

的数域.

(2) 设 $\mathbf{R}$ 为实数域,$\mathbf{C}$ 为复数域.P 是任意一个包含 $\mathbf{R}$ 又不等同 $\mathbf{R}$ 的数域,则 P 至少含一个复数 $a+b\mathrm{i}$ $(b\neq0)$.于是

$$\mathrm{i}=\frac{a+b\mathrm{i}-a}{b}\in P.$$

从而推出对任意实数 a,b,都有 $a+b\mathrm{i}\in P$,故 P 包含全体复数,是复数域,即 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{C}$ 之间不存在其它数域.

例 4 设 P_1 与 P_2 是两个数域,证明:

(1) $P_1\cap P_2$ 也是一个数域;

(2) $P_1\cup P_2$ 是一个数域 $\Leftrightarrow P_1\subseteq P_2$ 或 $P_2\subseteq P_1$.

证 (1) 因为 P_1 与 P_2 都包含 $\mathbf{Q}$,所以 $P_1\cap P_2$ 也包含 $\mathbf{Q}$.设 $a,b\in P_1\cap P_2$,则 $a,b\in P_1$,$a,b\in P_2$,且 $a+b,a-b,ab,a/b$ $(b\neq0)$ 也属于 P_1 和 P_2,故 $P_1\cap P_2$ 是一个数域.

(2) 充分性　设 $P_1 \subseteq P_2$，则 $P_1 \cup P_2 = P_2$，所以 $P_1 \cup P_2$ 是数域.

必要性　设 $P_1 \cup P_2$ 是一个数域，且 $P_1 \not\subseteq P_2$，则必有某一 $a \in P_1$，$a \notin P_2$. 再取任 $x \in P_2$，有 $x \in P_1 \cup P_2$，从而有 $a + x = b \in P_1 \cup P_2$. 这样，$b$ 必属于 P_1 或 P_2.

若 $b \in P_2$，则 $a = b - x \in P_2$，推出矛盾. 于是知 $b \notin P_2$，$b \in P_1$，从而 $x = b - a \in P_1$，得 $P_2 \subseteq P_1$.

同理可证 $P_2 \subseteq P_1$ 情形.

例 5　设 a 为任意正有理数，证明：

(1) 设 x, y 为任意有理数，则一切形如 $x + y\sqrt{a}$ 的数的集合 P 是一数域；

(2) P 是有理数域 $\Longleftrightarrow a$ 为某有理数的平方.

证　(1) P 对加、减、乘运算封闭是显然的，现证对除法也封闭.

任取 $A = c + d\sqrt{a}\ (A \neq 0) \in P$. 若 $d = 0$，则 $A = c \neq 0$，于是 $1/A = 1/c \in P$. 若 $d \neq 0$，当 $c - d\sqrt{a} = 0$ 时，有 $\sqrt{a} = c/d$，从而知一切形如 $x + y\sqrt{a} = x + yc/d$ 的数即为全体有理数，则 P 是有理数域.

当 $c - d\sqrt{a} \neq 0$ 时，有

$$\frac{1}{A} = \frac{c - d\sqrt{a}}{(c + d\sqrt{a})(c - d\sqrt{a})} = \frac{c - d\sqrt{a}}{c^2 - d^2 a} \in P,$$

所以 P 对除法也封闭.

(2) $\forall \sqrt{a} \in P$，若 P 为有理数域，则 $\sqrt{a}$ 必为有理数，所以 a 为有理数的一个完全平方数.

反之，若 a 是有理数的一个完全平方数，则 $\sqrt{a}$ 为一有理数，故 P 为有理数域.

关于多项式的加、减、乘运算，要求熟知其运算规律，能够熟练地进行运算.

多项式 $f(x)$ 的次数本书中记为 $\partial(f(x))$，也有的书记为

$\deg f(x)$，或次 $f(x)$，或 $f(x)$次.

例 6 计算

(1) $(x^3+x^2-x-1)(x^3-2x-1)-8x(x^2-1)$；

(2) $(x^2+ax-b)(x^2-1)+(x^3-ax+b)(x^2-1)$.

解 (1) 原式$=x^6+x^5-3x^4-12x^3+x^2+11x+1$.

(2) 原式$=x^5+x^4-x^3-x^2$.

例 7 设 $f(x)$是一个多项式，证明：$f(x)=kx$ （k 为常数）$\Longleftrightarrow$对任意常数 a,b，都有

$$f(a+b)=f(a)+f(b).$$

证 必要性 设 $f(x)=kx$，则

$$f(a+b)=k(a+b)=ka+kb=f(a)+f(b).$$

充分性 当 $f(x)=0$ 时，上述结论成立. 当 $f(x)\neq 0$ 时，若 $\partial(f(x))=n>1$，则不可能有 $f(x)=a_nx^n$ （$a_n\neq 0$），因为 $a_n2^n\neq a_n+a_n$，即 $f(1+1)\neq f(1)+f(1)$. 于是 $f(x)$必有不等于零的根 α，而

$$f(2\alpha)=f(\alpha+\alpha)=f(\alpha)+f(\alpha)=0,$$

由此可知 $2\alpha,3\alpha,\cdots$也是 $f(x)$的根. 但这是不可能的. 所以$f(x)$只能是常数项为零的一次多项式，即 $f(x)=kx$.

例 8 设 $f(x)=ah(x)+(x-a)k(x)$，$h(x)\neq 0$，$k(x)\neq 0$，且 $g(x)=(x-a)^mh(x)$，$m\geqslant 1$，$\partial(f(x))<\partial(g(x))$，$a\neq 0$，证明：$\partial(k(x))<\partial(h(x))+m-1$.

证 由 $f(x)-ah(x)=(x-a)k(x)$，知

$$\partial(k(x))+1=\partial(f(x)-ah(x))\leqslant\max[\partial(f(x)),\partial(g(x))].$$

又由 $\quad\partial(f(x))<\partial(g(x)),\partial(g(x))=m+\partial(h(x)),$

知 $\quad\partial(f(x))<m+\partial(h(x))$

于是 $\quad\max[\partial(f(x)),\partial(g(x))]<\partial(h(x))+m,$

$$\partial(k(x))+1<\partial(h(x))+m,$$

所以 $\quad\partial(k(x))<\partial(h(x))+m-1.$

例 9 证明：

(1) $\partial(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x))$

$\leqslant \max[\partial(f_1(x)),\partial(f_2(x)),\cdots,\partial(f_n(x))]$;

(2) $\partial(f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x))$

$=\partial(f_1(x))+\partial(f_2(x))+\cdots+\partial(f_n(x))$.

证 用数学归纳法可证.

(1) 当 $n=2$ 时,设$\partial(f_1(x))=m_1$,$\partial(f_2(x))=m_2$,则当 $m_1=m_2$ 且 $f_1(x)$与 $f_2(x)$首项系数和为零时,有$\partial(f_1(x)+f_2(x))<\max[\partial(f_1(x)),\partial(f_2(x))]$;其它情形时,等号成立.

设当 $n=k$ 时,有

$$\partial(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x))$$
$$\leqslant \max[\partial(f_1(x)),\partial(f_2(x)),\cdots,\partial(f_k(x))],$$

则 当 $n=k+1$ 时,有

$$\partial(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_{k+1}(x))$$
$$=\partial(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x))+f_{k+1}(x))$$
$$\leqslant \max[\partial(f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_k(x)),f_{k+1}(x)]$$
$$\leqslant \max[\partial(f_1(x)),\partial(f_2(x)),\cdots,\partial(f_k(x)),\partial(f_{k+1}(x))].$$

减法的情形类似可证.

(2) 当 $n=2$ 时,设$\partial(f_1(x))=m_1$,$\partial(f_2(x))=m_2$,则

$$\partial(f_1(x)f_2(x))=m_1m_2=\partial(f_1(x))+\partial(f_2(x)).$$

设当 $n=k$ 时,有

$$\partial(f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x))$$
$$=\partial(f_1(x))+\partial(f_2(x))+\cdots+\partial(f_k(x)),$$

则当 $n=k+1$ 时,有

$$\partial(f_1(x)f_2(x)\cdots f_{k+1}(x))$$
$$=\partial((f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x))\cdot f_{k+1}(x))$$
$$=\partial(f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x))+\partial(f_{k+1}(x))$$
$$=\partial(f_1(x)+\partial(f_2(x))+\cdots+\partial(f_k(x))+\partial(f_{k+1}(x)).$$

例 10 设 $f(x)$,$g(x)$和 $h(x)$都是实数域上的多项式,证明:若 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$,则

$$f(x)=g(x)=h(x)=0.$$

证 若 $g(x)=h(x)=0$，则 $f(x)=0$，上式成立.

若 $g(x)$ 与 $h(x)$ 中至少有一个不等于零，则 $xg^2(x)+xh^2(x)\neq 0$，从而 $f^2(x)\neq 0$. 因 $\partial(xg^2(x)+xh^2(x))$ 为奇数，而 $\partial(f^2(x))$ 是偶数，从而与 $xg^2(x)+xh^2(x)=f^2(x)$ 矛盾. 故必有 $g(x)=h(x)=0$，于是 $f^2(x)=0$，等式 $f(x)=g(x)=h(x)=0$ 成立.

第二节　整除与最大公因式

主 要 内 容

1. 定理 1（带余除法） 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，则存在唯一的多项式 $q(x)$，$r(x)$，使得

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或 $r(x)=0$. $q(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**商**，$r(x)$ 称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**余式**.

这样的 $q(x)$，$r(x)$ 是唯一决定的.

2. 定义 1 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，若存在 $h(x)\in P[x]$，使得 $f(x)=h(x)g(x)$，则称 $g(x)$ **整除** $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$. 并称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的**因式**，$f(x)$ 为 $g(x)$ 的**倍式**.

$g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

3. 定理 2 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，$g(x)\neq 0$，则 $g(x)\mid f(x)$ $\Longleftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式 $r(x)=0$.

4. 整除的几个常用性质：

(1) 若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid f(x)$，则 $f(x)=cg(x)$ $(c\neq 0)$；

(2) 若 $f(x)\mid g(x)$，$g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$；

(3) 若 $f(x)\mid g_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,r)$，则

$$f(x)\mid(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)),$$

其中 $u_i(x)\in P[x]$.

5. 定义 2 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,若 $d(x)\in P[x]$满足条件:

(1) $d(x)$是 $f(x),g(x)$的公因式,

(2) $f(x),g(x)$的公因式全是 $d(x)$的因式,

则称 $d(x)$为 $f(x),g(x)$的一个**最大公因式**.

6. 引理 若有 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$成立,则 $f(x),g(x)$和 $g(x),r(x)$有相同的公因式.

定理 3 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,若 $d(x)\in P[x]$是 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式,则必有 $u(x),v(x)\in P[x]$,使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

首项系数是 1 的最大公因式记为$(f(x),g(x))$.

7. 定义 3 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,若$(f(x),g(x))=1$,则称 $f(x),g(x)$**互素**.

8. 定理 4 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,则 $f(x),g(x)$互素$\Leftrightarrow$存在 $u(x),v(x)\in P[x]$,使得

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

9. 定理 5 若$(f(x),g(x))=1$,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$.

推论 若 $f_1(x)\mid g(x),f_2(x)\mid g(x)$,且$(f_1(x),f_2(x))=1$,则 $f_1(x)f_2(x)\mid g(x)$.

10. $(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x))$表示首项系数为 1 的多项式 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ $(s\geqslant 2)$的最大公因式 $d(x)$,$d(x)$有以下的性质:

(1) $d(x)\mid f_i(x)$, $i=1,2,\cdots s$;

(2) 若 $\varphi(x)\mid f_i(x),i=1,2,\cdots,s$,则 $\varphi(x)\mid d(x)$.

疑 难 解 析

1. 两个多项式的整除关系是否会因系数域的扩大而改变?

答 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,$P[x]\subseteq\overline{P}[x]$. 若在 $P[x]$中$g(x)$不能整除 $f(x)$,即在 $P[x]$中不存在 $h(x)$,使得 $f(x)=$

$g(x)h(x)$，则在$\overline{P}[x]$中 $g(x)$仍不能整除 $f(x)$. 这是因为：

若 $g(x)=0$，因在 $P[x]$中 $g(x)$不能整除 $f(x)$，所以 $f(x)\neq 0$，从而在$\overline{P}[x]$中 $g(x)$也不能整除 $f(x)$；

若 $g(x)\neq 0$，则在 $P[x]$中 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，且 $r(x)\neq 0$，但是 $P[x]\subseteq\overline{P}[x]$，所以 $q(x)$和 $r(x)$也是$\overline{P}[x]$的多项式，因此 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$在$\overline{P}[x]$中仍成立. 于是，由 $r(x)$的唯一性，$g(x)$在$\overline{P}[x]$中仍不能整除 $f(x)$.

2. 互素多项式有哪些重要命题？

答 关于互素多项式有以下重要命题：

(1) 若 $f(x)$，$g(x)$都与 $h(x)$互素，则 $f(x)g(x)$也与 $h(x)$互素.

(2) 若 $h(x)\mid f(x)g(x)$，而 $h(x)$与 $f(x)$互素，则 $h(x)\mid g(x)$.

(3) 若 $g(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid f(x)$，而 $g(x)$与 $f(x)$互素，则 $g(x)h(x)\mid f(x)$.

方法、技巧与典型例题分析

掌握两个多项式的除法，即能求出 $q(x)$与 $r(x)$，使得 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$；常用方法有带余除法和辗转相除法，也可以用待定系数法求得.

例 1 若在 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$中，只有 $f_i(x)$（i 是 $1,2,\cdots,s$ 中的一个）不能被 $g(x)$整除，证明：$f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_s(x)$必不能被 $g(x)$整除.

证 用反证法. 设 $h(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_s(x)$能被 $g(x)$整除，则

$$f_i(x)=h(x)-f_1(x)-\cdots-f_{i-1}(x)-f_{i+1}(x)-\cdots-f_s(x)$$

也能被 $g(x)$整除，此与题设矛盾. 命题得证.

例 2 证明：$x\mid f^k(x)\Leftrightarrow x\mid f(x)$.

证 充分性是显然的，即 $x\mid f(x)\Rightarrow x\mid f^k(x)$.

必要性 设 $x\mid f^k(x)$. 若 x 不能整除 $f(x)$，则 $f(x)$的常数项

必不为零. 不妨设 $f(x)$ 常数项为 a_0，则 $f^k(x)$ 常数项为 a_0^k，从而 x 不可能整除 $f^k(x)$，故必 $x|f(x)$.

例 3 证明：每一多项式都能被零次多项式整除.

证 设 c 为 P 中不等于零常数(零次多项式)，则 $f(x)=c(c^{-1}f(x))$，即 $c|f(x)$.

例 4 用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$;

(2) $f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$;

(3) $f(x)=2x^5-5x^3-8x, g(x)=x+3$;

(4) $f(x)=x^3-x^2-x, g(x)=x-1+2\mathrm{i}$.

解 用 $g(x)$ 除 $f(x)$，求商 $q(x)$ 与余式 $r(x)$ 的方法很多，我们每小题只给出一种方法，希望读者自己进行比较选择.

(1) 用长除法.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{3}x-\frac{7}{9} \qquad = q(x) \\
\hline
g(x)=3x^2-2x+1 & x^3-3x^2-x-1 \qquad = f(x) \\
 & x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x \\
\hline
 & -\frac{7}{3}x^2-\frac{4}{3}x-1 \\
 & -\frac{7}{3}x^2+\frac{14}{9}x-\frac{7}{9} \\
\hline
 & -\frac{26}{9}x-\frac{2}{9} \qquad = r(x)
\end{array}
$$

故
$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}\right)g(x)-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9},$$

即
$$q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9},\quad r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}.$$

(2) 用待定系数法. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是首项系数为 1 的四次与二次多项式，所以 $q(x)$ 为首项系数为 1 的二次多项式，余式次数小于 2. 故设

$$q(x)=x^2+ax+b,\quad r(x)=cx+d,$$

则 $$x^4-2x+5=(x^2+ax+b)(x^2-x+2)+cx+d.$$

展开等式右端，比较同次幂系数，得

$$\begin{cases}0=a-1,\\0=-a+b+2,\\-2=2a-b+c,\\5=2b+d,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1,\\b=-1,\\c=-5,\\d=7,\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}q(x)=x^2+x-1,\\r(x)=-5x+7.\end{matrix}$$

(3) 用综合除法. 注意先按 $f(x)$ 降幂排列写出各项系数，缺项的系数写为零.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}-3 & 2 & 0 & -5 & 0 & -8 & 0\\ & & -6 & 18 & -39 & 117 & -327\\\hline & 2 & -6 & 13 & -39 & 109 & \big| -327\end{array}$$

求得 $q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$, $r(x)=-327$.

(4) 用综合除法. 因为

$$\begin{array}{r|rrrr}1-2\mathrm{i} & 1 & -1 & -1 & 0\\ & & 1-2\mathrm{i} & -4-2\mathrm{i} & -9+8\mathrm{i}\\\hline & 1 & -2\mathrm{i} & -5-2\mathrm{i} & \big| -9+8\mathrm{i}\end{array}$$

所以 $$q(x)=x^2-2\mathrm{i}x-5-2\mathrm{i},\ r(x)=-9+8\mathrm{i}.$$

例 5 m,p,q 适合什么条件时，有

(1) $x^2+mx-1\mid x^3+px+q$;

(2) $x^2+mx+1\mid x^4+px^2+q$.

解 (1) 用 x^2+mx-1 去除 x^3+px+q，余式

$$r(x)=(m^2+p+1)x+q-m.$$

由 $r(x)=0$ 知，当 $p=-m^2-1, q=m$ 时，可以整除.

(2) 用 x^2+mx+1 去除 x^4+px^2+q，余式

$$r(x)=[m-m(m^2+p-1)]x+q-m^2+1-p.$$

由 $r(x)=0$，得

$$\begin{cases}m(2-p-m^2)=0,\\q-m^2+1-p=0.\end{cases}$$

当 $m=0$ 时，

$$q+1-p=0 \Longrightarrow p=1+q,\ p=2, q=1;$$

当 $m\neq 0$ 时，　　　　$p=2-m^2, q=1.$

例 6　a,b 为什么数时，$g(x)\mid f(x)$？

(1) $f(x)=x^4-3x^3+6x^2+ax+b, g(x)=x^2-1$；

(2) $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+bx-2, g(x)=(x-1)^2$.

解　可以用普通除法，也可以用综合除法.

(1) 用普通除法. 用 $g(x)$ 去除 $f(x)$，余式 $r(x)=(a-3)x+b+7$. 由 $r(x)=0$ 得 $a=3, b=-7$.

(2) 用综合除法. 因 $g(x)=(x-1)^2=(x-1)(x-1)$，故用 $x-1$ 先除 $f(x)$，再用 $x-1$ 去除所得的商.

$$\begin{array}{r|ccccc}
1 & 1 & a & 2 & b & -2 \\
 & & 1 & a+1 & a+3 & a+b+3 \\
\hline
1 & 1 & a+1 & a+3 & a+b+3 & a+b+1 \\
 & & 1 & a+2 & 2a+5 & \\
\hline
 & 1 & a+2 & 2a+5 & 3a+b+8 &
\end{array}$$

令 $\begin{cases} a+b+1=0, \\ 3a+b+8=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-7/2, \\ b=5/2. \end{cases}$

由上式有

$$f(x)=(x-1)^2[x^2+(a+2)x+(2a+5)] \\ +(x-1)(3a+b+8)+a+b+1.$$

例 7　将 $f(x)$ 表示成 $x-x_0$ 的方幂和，即

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式.

(1) $f(x)=x^5, x_0=1$；

(2) $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$；

(3) $f(x)=x^4+2\mathrm{i}x^3-(1+\mathrm{i})x^2-3x+7+\mathrm{i}, x_0=-\mathrm{i}$.

解　连续施行综合除法，即用 $x-x_0$ 除 $f(x)$ 得余数 c_0，再用

$x-x_0$ 除所得商得 $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

(1) 因为

1	1	0	0	0	0	0
		1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	$1=c_0$
		1	2	3	4	
1	1	2	3	4	$5=c_1$	
		1	3	6		
1	1	3	6	$10=c_2$		
		1	4			
1	1	4	$10=c_3$			
		1				
	1	$5=c_4$				

故
$$f(x)=1+5(x-1)+10(x-1)^2+10(x-1)^3+5(x-1)^4+(x-1)^5.$$

(2) 因为

-2	1	0	-2	0	3
		-2	4	-4	8
-2	1	-2	2	-4	$11=c_0$
		-2	8	-20	
-2	1	-4	10	$-24=c_1$	
		-2	12		
	1	-6	$22=c_2$		
		-2			
	1	$-8=c_3$			

故 $f(x)=11-24(x+2)+22(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$.

(3) 因为

$-\mathrm{i}$	1	$2\mathrm{i}$	$-1-\mathrm{i}$	-3	$7+\mathrm{i}$
		$-\mathrm{i}$	1	-1	$4\mathrm{i}$
$-\mathrm{i}$	1	i	$-\mathrm{i}$	-4	$7+5\mathrm{i}=c_0$
		$-\mathrm{i}$	0	-1	
$-\mathrm{i}$	1	0	$-\mathrm{i}$	$-5=c_1$	
		$-\mathrm{i}$	-1		
	1	$-\mathrm{i}$	$-1-\mathrm{i}=c_2$		
		$-\mathrm{i}$			
	1	$-2\mathrm{i}=c_3$			

故
$$f(x)=7+5\mathrm{i}-5(x+\mathrm{i})+(-1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})^2-2\mathrm{i}(x+\mathrm{i})^3+(x+\mathrm{i})^4.$$

例 8 求下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式：

(1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$；

(2) $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$.

解 一般用辗转相除法可以求得. $s(s>2)$ 个多项式的最大公因式也可以用辗转相除法求得. 因为，若 $d_0(x)$ 是 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{s-1}(x)$ 的一个最大公因式，则 $d_0(x)$ 与 $f_s(x)$ 的最大公因式即为 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$ 的最大公因式.

(1) 因为

$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$	x^3+x^2-x-1	$x^4+x^3-3x^2-4x-1$	x
	$x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$	$x^4+x^3-x^2-x$	
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$	$-2x^2-3x-1$	$\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}$
	$-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$	$-2x^2-2x$	
	$-\frac{3}{4}x^2-\frac{3}{4}$	$-x-1$	
		$-x-1$	
		0	

即 $$f(x)=xg(x)+(-2x^2-3x-1),$$

$$g(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)(-2x^2-3x-1)+\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right),$$

$$-2x^2-3x-1=\left(\frac{8}{3}x+\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}\right),$$

所以 $$(f(x),g(x))=x+1.$$

(2)

$-\frac{1}{3}x+\frac{10}{9}$	x^3-3x^2+1	x^4-4x^3+1	$x-1$
	$x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x$	x^4-3x^3+x	
	$-\frac{10}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1$	$-x^3-x+1$	
	$-\frac{10}{3}x^2-\frac{10}{9}x+\frac{20}{9}$	$-x^3+3x^2-1$	
	$\frac{16}{9}x-\frac{11}{9}$	$-3x^2-x+2$	$-\frac{27}{16}x-\frac{441}{256}$
		$-3x^2+\frac{33}{16}x$	
		$-\frac{49}{16}x+2$	
		$-\frac{49}{16}x+\frac{539}{256}$	
		$r(x)=-\frac{27}{256}$	

即 $$(f(x),g(x))=1.$$

注意,当 $r(x)\neq 0$ 时,$(f(x),g(x))=1$.

例 9 求 $u(x),v(x)$,使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)).$$

(1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2,g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

(2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9,g(x)=2x^3-x^2-5x+4$;

(3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1,g(x)=x^2-x-1$.

解 用辗转相除法,将结果列出.

(1)

$x+1$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	$x^4+2x^3-x^2-4x-2$	1
	$x^4 \quad -2x^2$	$x^4+x^3-x^2-2x-2$	
	x^3+x^2-2x-2	$x^3 \quad -2x$	x
	$x^3 \quad -2x$	$x^3 \quad -2x$	
	$x^2 \quad -2$	0	

即
$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=g(x)+(x^3-2x),$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)=(x+1)r_1(x)+(x^2-2),$$
$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)=xr_2(x),$$
故
$$\begin{aligned}(f(x),g(x))=x^2-2=r_2(x)&=g(x)-q_2(x)r_1(x)\\&=g(x)-q_2(x)[f(x)-q_1(x)g(x)]\\&=-q_2(x)f(x)+[1+q_2(x)q_1(x)]g(x)=x^2-2,\end{aligned}$$
所以
$$u(x)=-q_2(x)=-x-1,$$
$$v(x)=1+q_2(x)q_1(x)=1+(x+1)\cdot 1=x+2.$$

(2) 用辗转相除法得
$$f(x)=2xg(x)+(-6x^2-3x+9),$$
$$g(x)=\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)r_1(x)+(-x+1),$$
$$r_1(x)=(6x+9)r_2(x),$$
故
$$(f(x),g(x))=q_2(x)f(x)+[-q_2(x)q_1(x)-1]g(x)=x-1,$$
所以
$$u(x)=q_2(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3},$$
$$v(x)=-q_2(x)q_1(x)-1=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1.$$

(3) 用辗转相除法得
$$f(x)=(x^2-3)g(x)+(x-2),$$
$$g(x)=(x+1)r_1(x)+1,$$
故
$$(f(x),g(x))=-q_2(x)f(x)+[1+q_1(x)q_2(x)]g(x)=1,$$
所以 $u(x)=-x-1$，$v(x)=x^3+x^2-3x-2.$

例 10 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$，$g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 t,u 的值.

解 仍用辗转相除法，可得

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)=g(x)+tx^2+4x,$$

$$\begin{aligned}g(x)&=q_2(x)r_1(x)+r_2(x)\\&=(tx^2+4x)(x+t+4)-4(t-4)x+2u.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是二次多项式，得 $r_2(x)=0$，从而

$$\begin{cases}-4(t-4)=0,\\2u=0,\end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}t=4,\\u=0.\end{cases}$$

例 11 证明：若 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，则 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

证 由题设知 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式.

设 $h(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任一公因式，则 $h(x)\mid f(x)$，$h(x)\mid g(x)$；又 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个组合，故存在 $u(x)$，$v(x)\in P[x]$，使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

所以 $h(x)\mid d(x)$，从而 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

例 12 证明：$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$，($h(x)$ 首项系数为 1).

证 设 $d(x)=(f(x),g(x))$，则成立

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x),$$

故 $$u(x)f(x)h(x)+v(x)g(x)h(x)=d(x)h(x).$$

因为 $d(x)\mid f(x)$，$d(x)\mid g(x)$，所以 $d(x)h(x)\mid f(x)h(x)$，$d(x)h(x)\mid g(x)h(x)$. 由例 11 知 $d(x)h(x)$ 是 $f(x)h(x)$ 与 $g(x)h(x)$ 的一个最大公因式，又 $(f(x),g(x))h(x)$ 的首项系数为 1，于是

$$(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x).$$

例 13 若 $f(x)$，$g(x)$ 不全为零，证明

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$$

证 由定义知，存在 $u(x), v(x) \in P[x]$，使得

$$(f(x), g(x)) = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

由 $f(x), g(x)$ 不全为零知，$(f(x), g(x)) \neq 0$. 由上式得

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x), g(x))} + v(x)\frac{g(x)}{(f(x), g(x))} = 1;$$

由互素的充要条件知

$$\frac{f(x)}{(f(x), g(x))} + \frac{g(x)}{(f(x), g(x))} = 1.$$

例 14 若 $f(x), g(x)$ 不全为零，且

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = (f(x), g(x)),$$

证明：$(u(x), v(x)) = 1$.

证 因为 $f(x), g(x)$ 不全为零，故 $(f(x), g(x)) \neq 0$. 由题设可得

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x), g(x))} + v(x)\frac{g(x)}{(f(x), g(x))} = 1,$$

所以，由互素的充要条件知，$(u(x), v(x)) = 1$.

例 15 若 $(f(x), g(x)) = 1$，$(f(x), h(x)) = 1$，证明：

$$(f(x), g(x)h(x)) = 1.$$

证 由最大公因式定义知，存在 $u_1(x), v_1(x), u_2(x), v_2(x) \in P[x]$，使得

$$u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x) = 1, \quad u_2(x)f(x) + v_2(x)h(x) = 1.$$

两式相乘得

$$[u_1(x)u_2(x)f(x) + v_1(x)u_2(x)g(x) + u_1(x)v_2(x)h(x)]f(x) + [v_1(x)v_2(x)]g(x)h(x) = 1$$

[ ]号内多项式仍属于 $P[x]$，故由互素的充要条件知

$$(f(x), g(x)h(x)) = 1.$$

也可用反证法证(请参看例 17).

例 16 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x), g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$ 都是多项式，且

$$(f_i(x), g_j(x)) = 1 \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n).$$

证明：$(f_1(x),f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$.

证 由题设知，$(f_1(x),g_j(x))=1\quad(j=1,2,\cdots,n)$.

多次应用例 15 的结果，可得

$$(f_1(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

类似可得

$$(f_i(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1,\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

再多次应用例 15 的结果即得

$$(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1.$$

例 17 若 $(f(x),g(x))=1$，证明：$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1$.

证 用反证法. 若

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=d(x),\partial(d(x))>0,$$

则对 $d(x)$ 的一个不可约因式 $p(x)$，有

$$p(x)\mid f(x)g(x),\quad p(x)\mid[f(x)+g(x)],$$

即 $p(x)\mid f(x),p(x)\mid g(x)$. 所以 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式，与 $(f(x),g(x))=1$ 矛盾. 所以

$$(f(x)g(x),f(x)+g(x))=1.$$

例 18 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x),g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，且 $ad-bc\neq0$，证明：$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x))$.

证 设 $(f(x),g(x))=d(x)$，则 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$. 又由题设条件知 $d(x)\mid f_1(x),d(x)\mid g_1(x)$.

再设 $h(x)\mid f_1(x),h(x)\mid g_1(x)$. 而由题设可解得

$$f(x)=\frac{d}{ad-bc}f_1(x)-\frac{b}{ad-bc}g_1(x),$$

$$g(x)=\frac{c}{ad-bc}f_1(x)+\frac{a}{ad-bc}g_1(x),$$

所以有 $h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$，从而 $h(x)\mid d(x)$. 即 $d(x)$ 也是 $f_1(x)$ 和 $g_1(x)$ 的最大公因式，有

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)).$$

例 19 证明：只要 $\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大

于零，就可以适当选择适合等式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),$$

$$\partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right).$$

证 因为存在 $s(x),t(x)\in P[x]$，使得

$$s(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+t(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1. \qquad ①$$

根据带余除法，有

$$s(x)=\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}q_1(x)+r_1(x),$$

$$t(x)=\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}q_2(x)+r_2(x),$$

且

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right),\partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\right). \qquad ②$$

若将式②代入式①可得

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}$$

$$+[q_1(x)+q_2(x)]\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\cdot\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1. \qquad ③$$

又由式②知

$$\partial\left(u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)$$

$$<\partial\left[\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}\cdot\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right].$$

所以必有 $q_1(x)+q_2(x)=0$，从而有

$$u(x)\frac{f(x)}{(f(x),g(x))}+v(x)\frac{g(x)}{(f(x),g(x))}=1,$$

即 $$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)).$$

例 20 若 $f(x),g(x)$互素，证明：$f(x^m)$与 $g(x^m)$也互素.

证 因为 $f(x),g(x)$互素，所以$(f(x),g(x))=1$，从而$(f(y),g(y))=1$. 令 $y=x^m$，即$(f(x^m),g(x^m))=1$，于是 $f(x^m)$与$g(x^m)$也互素.

做证明题，首先想到的是依定义证，然后再考虑应用定理或证明等价命题. 当无法直接证明时，再利用反证法来证.

例 21 设 m 为任意正整数，证明：$g^m(x)\mid f^m(x)\Leftrightarrow g(x)\mid f(x)$.

证 充分性 若 $g(x)\mid f(x)$，显然有 $g^m(x)\mid f^m(x)$.

必要性 设 $g^m(x)\mid f^m(x)$，则有 $h(x)\in P[x]$，使得 $f^m(x)=g^m(x)h(x)$. 令$(f(x),g(x))=d(x)$，则有 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，且 $f_1(x)$与 $g_1(x)$互素，于是有

$$f_1^m(x)=g_1^m(x)h(x).$$

因为 $g_1(x)$必为非零常数，可设 $g_1(x)=a$，则 $g(x)=ad(x)$，$f(x)=\frac{1}{a}g(x)f_1(x)$，从而 $g(x)\mid f(x)$.

例 22 设 $f_1(x),f_2(x),g_1(x),g_2(x)$是四个多项式，且

$$g_1(x)g_2(x)\mid f_1(x)f_2(x),\ f_1(x)\neq 0,$$

证明：若 $f_1(x)\mid g_1(x)$，则 $g_2(x)\mid f_2(x)$.

证 由题设和 $f_1(x)\mid g_1(x)$，应有

$$f_1(x)f_2(x)=g_1(x)g_2(x)q(x),\quad g_1(x)=f_1(x)q_1(x),$$

故
$$f_1(x)f_2(x)=f_1(x)q_1(x)g_2(x)q(x).$$

化简得 $f_2(x)=q_1(x)g_2(x)q(x)$，即 $g_2(x)\mid f_2(x)$.

第三节 因式分解定理与重因式

主要内容

1. 定义 1 若数域 P 上次数不小于 1 的多项式 $p(x)$不能表示为数域 P 上两个次数比它低的多项式的乘积，则称 $p(x)$是数

域 P 上的**不可约多项式**.

零次多项式既不是可约的也不是不可约的.

2. 定理 1 若 $p(x)$是不可约多项式,则对任意的两个多项式 $f(x),g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$一定可以得出 $p(x)\mid f(x)$或 $p(x)\mid g(x)$.

3. 因式分解及唯一性定理 数域 P 上任一次数$\geqslant 1$ 的多项式$f(x)$都可以唯一地分解成数域 P 上的一些不可约多项式的乘积.

4. 定义 2 若不可约多项式 $p(x)$,成立 $p^k(x)\mid f(x)$, $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$,则称 $p(x)$是 $f(x)$的 k **重因式**.

5. 定义 3 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,则称多项式

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

为 $f(x)$的**微商(或导数)**.

多项式的微商与数学分析中的微商有相同的运算性质.

6. 定理 2 若不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 k $(k\geqslant 1)$重因式,则它是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式.

推论 1 若不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$的 $k(k\geqslant 1)$重因式,则 $p(x)$也是 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(k-1)}(x)$的因式,但不是 $f^{(k)}(x)$的因式.

推论 2 不可约多项式 $p(x)$是 $f(x)$重因式的充要条件为 $p(x)$是 $f(x)$与 $f'(x)$的公因式.

推论 3 多项式 $p(x)$没有重因式的充要条件是 $f(x)$与 $f'(x)$互素.

疑难解析

怎样理解多项式 $f(x)$的因式分解的唯一性?

答 对数域 P 上的一个次数$\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$,如果可以分解为 P 上的一些不可约多项式的乘积,则这种分解是唯一的. 即

若

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

则 $s=t$，且重新排列次序后必有

$$p_i(x)=c_iq_i(x),\quad i=1,2,\cdots,s,$$

其中 c_i $(i=1,2,\cdots,s)$ 是一些非零常数．也就是说，因式的差异只表现在常数 c_i 上．

方法、技巧与典型例题分析

首先，补充一下最小公倍式概念．若① $f(x)\mid m(x)$，$g(x)\mid m(x)$；② $f(x)$，$g(x)$ 的任一公倍式都是 $m(x)$ 的公倍式，则称 $m(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个**最小公倍式**．首项系数是 1 的最小公倍式记为 $[f(x),g(x)]$．

例 1 若 $f(x)$，$g(x)$ 的首项系数都是 1，证明

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}.\qquad ①$$

证 设 $(f(x),g(x))=d(x)$，且 $f(x)=d(x)f_1(x)$，$g(x)=d(x)g_1(x)$，则 $f(x)g_1(x)=g(x)f_1(x)$，从而 $f(x)g_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公倍式．

再设 $h(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公倍式，有 $h(x)=f(x)s(x)$，$h(x)=g(x)t(x)$，则有

$$d(x)f_1(x)s(x)=d(x)g_1(x)t(x),$$

即有 $f_1(x)s(x)=g_1(x)t(x)$，故 $g_1(x)\mid f_1(x)s(x)$，$f_1(x)\mid g_1(x)t(x)$．由于 $(f_1(x),g_1(x))=1$，所以 $g_1(x)\mid s(x)$．设 $s(x)=g_1(x)s_1(x)$，则有 $h(x)=f(x)g_1(x)s_1(x)$，即 $h(x)$ 是 $f(x)g_1(x)$ 的一个倍式．因此 $f(x)g_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小公倍式．得

$$[f(x),g(x)](f(x),g(x))=f(x)g_1(x)d(x)=f(x)g(x),$$

即

$$[f(x),g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x),g(x))}.$$

例 2 求下列题中的$[f(x),g(x)]$：

(1) $f(x)=x^2+3x+2, g(x)=x^2+x-2$；

(2) $f(x)=x^3+5x^2+7x-6, g(x)=-x^2-5x-7$.

解 首先求出$(f(x),g(x))$，可以用分解因式或辗转相除法求得. 再利用例 1 中式①求出.

(1) 因为 $f(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2), g(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$，所以$(f(x),g(x))=x+2$，于是

$[f(x),g(x)]=(x+2)(x+1)(x-1)=x^3+2x^2-x-2$.

(2) 因为$(f(x),g(x))=1$，所以

$$[f(x),g(x)]=f(x)g(x).$$

例 3 求下列多项式的公共根：

$f(x)=x^3+2x^2+2x+1$； $g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$.

解 可以用分解因式法或辗转相除法先求出最大公因式，然后求得公共根.

$$f(x)=(x+1)(x^2+x+1), \quad g(x)=(x^2+1)(x^2+x+1),$$

由 $$x^2+x+1=[x+(1-\sqrt{3}\mathrm{i})/2][x+(1+\sqrt{3}\mathrm{i})/2]$$

得公共根为$(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})/2$.

例 4 判别下列多项式有无重因式：

(1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$；

(2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$.

解 计算 $f'(x)$. 若 $f(x)$与 $f'(x)$互素，则 $f(x)$无重因式；若 $f(x)$与 $f'(x)$不互素，则其最大公因式 $d(x)$的任何 $k-1$ 重因式即为 $f(x)$的 k 重因式.

(1) $f'(x)=5x^4-20x^3+21x^2-4x+4$，可求得$(f(x),f'(x))=(x-2)^2$，所以 $f(x)$有三重因式$(x-2)$.

(2) $f'(x)=4x^3+8x-4$，可求得$(f(x),f'(x))=1$，所以 $f(x)$没有重因式.

关于多项式的可约与不可约，必须明确它是与给定的数域有关的. 在一个数域上不可约的多项式，在另一个数域上可能可约.

如 x^2-3 在有理数域上不可约,但在实数域上却可约,有 $x^2-3=(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. 所以讨论不可约多项式时,一定要明确在什么数域上讨论.

例 5 证明:次数大于零且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件为,对任意的多项式 $g(x)$ 必有 $(f(x),g(x))=1$,或者对某一正整数 m, $f(x)\mid g^m(x)$.

证 必要性 设 $f(x)=p^m(x)$, $p(x)$ 为不可约多项式,则对任意多项式 $g(x)$ 必有 $(p(x),g(x))=1$ 或 $p(x)\mid g(x)$. 于是,当 $(p(x),g(x))=1$ 时,得 $(f(x),g(x))=1$;当 $p(x)\mid g(x)$ 时,$p^m(x)\mid g^m(x)$,即 $f(x)\mid g^m(x)$.

充分性 用反证法. 设 $f(x)=p^m(x)f_1(x)$. $m\geqslant 1$, $p(x)$ 不可约且 $p(x)\nmid f_1(x)$, $\partial(f_1(x))>0$,则 $(f(x),f_1(x))=f_1(x)\neq 1$,并且对任何正整数 m,有 $f(x)\nmid f_1^m(x)$. 这是因为若 $f(x)\mid f_1^m(x)$,则由 $p(x)\mid f(x)$ 必有 $p(x)\mid f_1^m(x)$,由 $p(x)$ 的不可约性,应有 $p(x)\mid f_1(x)$,与假设矛盾. 故 $f(x)\nmid f_1^m(x)$,即 $f(x)$ 必为一不可约多项式的方幂.

例 6 证明:次数大于零且首项系数为 1 的多项式 $f(x)$ 是某一不可约多项式方幂的充分必要条件是,对任意的多项式 $g(x)$, $h(x)$,由 $f(x)\mid g(x)h(x)$ 可以推出 $f(x)\mid g(x)$,或者对某一正整数 m, $f(x)\mid h^m(x)$.

证 必要性 设 $f(x)=p^k(x)$, $p(x)$ 不可约,且 $f(x)\mid g(x)h(x)$,但 $f(x)\nmid g(x)$. 故 $f(x)$ 与 $h(x)$ 不互素. 则由例 5 知,存在正整数 m,使得 $f(x)\mid h^m(x)$.

充分性 设条件成立,但 $f(x)$ 不是某不可约多项式方幂,而有 $f(x)=p^k(x)h(x)$, $k\geqslant 1$, $p(x)$ 不可约, $p(x)\nmid h(x)$, $\partial(h(x))>0$. 则有 $f(x)\mid p^k(x)h(x)$,但 $f(x)\nmid p^k(x)$. 故必有正整数 m,使得 $f(x)\mid h^m(x)$. 又得 $p(x)\mid h^m(x)$. 由于 $p(x)$ 不可约,应有 $p(x)\mid h(x)$,但这引出矛盾. 所以 $f(x)$ 必为某个不可约多项式的方幂.

例 7 证明:设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式,若对于任何多项式 $f(x),g(x)$,由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 可以推出 $p(x)\mid f(x)$ 或 $p(x)\mid g(x)$,则 $p(x)$ 是不可约多项式.

证 用反证法.设 $p(x)$ 可约,则必存在次数小于 $\partial(p(x))$ 的多项式 $f(x),g(x)$,使得 $p(x)=f(x)g(x)$,即 $p(x)\mid f(x)g(x)$.但由题设 $p(x)\mid f(x),p(x)\mid g(x)$,但 $\partial(f(x))<\partial(p(x))$,$\partial(g(x))<\partial(p(x))$,所以不可能实现.从而知 $p(x)$ 必为不可约多项式.

第四节　多项式函数
复系数与实系数多项式的因式分解

主要内容

1. 余数定理 用一次多项式 $x-\alpha$ 去除多项式 $f(x)$,所得的余式是一个常数,等于 $f(\alpha)$.

如果 $f(\alpha)=0$,则 α 称为 $f(x)$ 的一个根(零点).

推论 α 是 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow (x-\alpha)\mid f(x)$.

若 $(x-\alpha)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式,当 $k=1$ 时,α 称为**单根**;当 $k>1$ 时,α 称为**重根**.

2. 定理 1 $P[x]$ 中 n 次多项式 $(n\geqslant 0)$ 在数域 P 中的根不可能多于 n 个,重根按重数计算.

3. 定理 2 若多项式 $f(x),g(x)$ 的次数都不超过 n,而它们对 $n+1$ 个不同的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n+1}$ 有相同的值,即 $f(\alpha_i)=g(\alpha_i)$ $(i=1,2,\cdots,n+1)$,则 $f(x)=g(x)$.

4. 代数基本定理 每个次数不小于 1 的复系数多项式在复数域中有一个根.

即每个次数不小于 1 的复系数多项式,在复数域上一定有一个一次因式.

5. 复系数多项式因式分解定理 每个次数不小于 1 的复系数多项式在复数域上都可以唯一地分解成一次因式的乘积.

6. 实系数多项式因式分解定理 每个次数不小于 1 的实系数多项式在实数域上都可以唯一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

疑 难 解 析

怎样认识多项式是一个函数?

答 利用定理 2,我们可以将数域 P 上的多项式看成通常的函数. 若设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是数域 P 上的一个多项式,则 $\forall c\in P$,由 $f(x)$ 确定一个数 $f(c)$,从而知 $f(x)$ 定义一个确定的函数,其定义域是 P. 当 P 是实数域时,正是数学分析中的多项式函数,称为 P 上的多项式函数.

每一个多项式都定义一个确定的函数,不同的多项式所定义的函数不同. 因此,可以用函数的观点来研究多项式的理论.

但是要注意,$P[x]$的两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 所确定的两个多项式函数相等,这两个多项式不一定相等. 因为,两个多项式相等指的是它们有完全相等的项,而两个多项式函数相等指的是 $\forall c\in P, f(c)=g(c)$. 这是两种不同的相等概念.

方法、技巧与典型例题分析

对多项式函数要有正确的理解,对多项式重根的概念要有明确的认识,掌握讨论多项式重根的有关问题.

例 1 求使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根的 t 值.

解 因为 $f'(x)=3x^2-6x+t$,用辗转相除法得

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)f'(x)+\frac{2(t-3)}{3}x+\frac{t-3}{3},$$

$$f'(x)=\left[\frac{9}{2(t-3)}x-\frac{45}{4(t-3)}\right]r_1(x)+\left(t+\frac{15}{4}\right).$$

根据 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 不互素 $\Longleftrightarrow r_1(x)=0$ 或 $r_2(x)=0$，从而知 $f(x)$ 有重根的条件是 $t=3$ 或 $t=-15/4$.

例 2 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.

解 因为 $(x^3+px+q)'=3x^2+p$，可以求得

$$f(x)=x^3+px+q=\frac{1}{3}x(3x^2+p)+\frac{2}{3}px+q,$$

$$f'(x)=3x^2+p=\left(\frac{9}{2p}x-\frac{27}{4p^2}q\right)\left(\frac{2}{3}px+q\right)+\frac{4p^3+27q^2}{4p^2},$$

所以当 $r_1(x)=\dfrac{2}{3}px+q=0$，即当 $p=q=0$ 时，$f(x)$ 有重根；

当 $r_2(x)=\dfrac{4p^3+27q^2}{4p^2}=0$，即 $4p^3+27q^2=0$ 时，$f(x)$ 有重根.

例 3 若 $(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^2+1$，求 A,B.

解一 用 $(x-1)^2$ 去除 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$，得余式

$$r_1(x)=(4A+2B)x+1-3A-B.$$

由 $r_1(x)=0$ 得 $\quad 4A+2B=0,\ 1-3A-B=0,$

解得 $$A=1,\ B=-2.$$

解二 用赋值法. 因为 $(x-1)^2\mid Ax^4+Bx^2+1$，所以 $x=1$ 是 $f(x)=Ax^4+Bx^2+1$ 与 $f'(x)=4Ax^3+2Bx$ 的根. 由

$$f(1)=A+B+1=0,\quad f'(1)=4A+2B=0,$$

解得 $$A=1,\ B=-2.$$

例 4 证明：下列多项式没有重根.

(1) $f(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$；

(2) $g(x)=x^n+nx^{n-1}+\cdots+n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2x+n!$.

证 (1) 因为 $f'(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$，所以

$$f(x)=f'(x)+\frac{1}{n!}x^n.$$

$$(f(x),f'(x))=\left(f'(x)+\frac{1}{n!}x^n,f'(x)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{n!}x^n, f'(x)\right)=1.$$

从而知 $f(x)$没有重根.

(2) 因为$\frac{g(x)}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}$,由题(1)知$\frac{g(x)}{n!}$没有重根,而 $g(x)$与$\frac{g(x)}{n!}$有完全相同的根,所以 $g(x)$没有重根.

例 5 若 a 是 $f'''(x)$的一个 k 重根,证明 a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的 $k+3$ 重根.

证 因为

$$g'(x)=\frac{x-a}{2}f''(x)-\frac{1}{2}[f'(x)-f'(a)],$$

$$g''(x)=\frac{x-a}{2}f'''(x),$$

而 a 是 $f'''(x)$的 k 重根,所以 a 是 $g''(x)$的 $k+1$ 重根.

又由 $g(a)=0, g'(a)=0$ 知,若 a 为 $g(x)$的 t 重根,则为 $g'(x)$的 $t-1$ 重根,为 $g''(x)$的 $t-2$ 重根. 由 $t-2=k+1$ 知,a 为 $g(x)$的 $k+3$ 重根.

例 6 证明:x_0 是 $f(x)$的 k 重根$\Leftrightarrow f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$,而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

证 必要性 若 x_0 是 $f(x)$的 k 重根,则 x_0 是 $f'(x)$的 $k-1$ 重根,依次递推,知 x_0 是 $f^{(k-1)}(x)$的单根,但不是 $f^{(k)}(x)$的根,所以

$$f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0, \quad f^{(k)}(x_0)\neq 0.$$

充分性 由 $f^{(k-1)}(x_0)=0, f^{(k)}(x_0)\neq 0$ 知 x_0 是 $f^{(k-1)}(x)$的单根;又由 $f^{(k-2)}(x_0)=0$ 知 x_0 是 $f^{(k-2)}(x)$的 2 重根;依次递推,知 x_0 是 $f(x)$的 k 重根.

例 7 举例说明断语"若 α 是 $f'(x)$的 m 重根,则 α 是 $f(x)$的

$m+1$ 重根”是不正确的.

解 例如 $f(x)=x^{m+1}-1$,有 $f'(x)=\frac{1}{m+1}x^m$. 显然 $x=0$ 是 $f'(x)$的 m 重根,但不是 $f(x)$的根.

事实上,仅当 $f'(x)$的 m 重根同时为 $f(x)$的根时,它是 $f(x)$的 $m+1$ 重根.

例 8 证明:若$(x-1)\mid f(x^n)$,则$(x^n-1)\mid f(x^n)$.

证 因为$(x-1)\mid f(x^n)$,所以 1 是 $f(x^n)$的根. 由 $f(1^n)=f(1)=0$,得$(x-1)\mid f(x)$,故存在多项式 $g(x)$,使得 $f(x)=(x-1)g(x)$,于是 $f(y)=(y-1)g(y)$. 令 $y=x^n$,即 $f(x^n)=(x^n-1)g(x^n)\Rightarrow(x^n-1)\mid f(x^n)$.

例 9 证明:若$(x^2+x+1)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3)$,则

$$(x-1)\mid f_1(x),\quad (x-1)\mid f_2(x).$$

证 x^2+x+1 的两个根为

$$\alpha=(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})/2,\quad \beta=(-1-\sqrt{3}\mathrm{i})/2.$$

因为
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1),$$
所以 $\alpha^3=\beta^3=1$. 又

$$x^2+x+1=(x-\alpha)(x-\beta),$$

且
$$(x-\alpha)(x-\beta)\mid f_1(x^3)+xf_2(x^3),$$

所以
$$\begin{cases}f_1(\alpha^3)+\alpha f_2(\alpha^3)=0,\\ f_1(\beta^3)+\beta f_2(\beta^3)=0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{matrix}f_1(1)+\alpha f_2(1)=0,\\ f_1(1)+\beta f_2(1)=0.\end{matrix}$$

解得 $f_1(1)=f_2(1)=0$,从而有

$$(x-1)\mid f_1(x),\quad (x-1)\mid f_2(x).$$

例 10 求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解.

解 设
$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\quad(k=0,1,\cdots,n-1).$$

因为 x^n-1 在复数域内恰有 n 个根 $\varepsilon_k(k=0,1,\cdots,n-1)$,所以 x^n-1 在复数域上的因式分解为

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}).$$

在实数域上，由于$\bar{\varepsilon}_k=\varepsilon_{n-k}$，所以

$$\varepsilon_k+\varepsilon_{n-k}=\varepsilon_k+\bar{\varepsilon}_k=2\cos\frac{2k\pi}{n},$$

是一个实数. 又由于

$$(\varepsilon_k+\varepsilon_{n-k})^2-4=4\cos^2\frac{2k\pi}{n}-4<0\quad(k=0,1,\cdots,n-1),$$

故 $x^2-(\varepsilon_k+\varepsilon_{n-k})x+1$ 是实数域上的不可约多项式.

当 n 为奇数时，有

$$\begin{aligned}x^n-1&=(x-1)\left[x^2-(\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1})x+1\right]\cdots\left[x^2-(\varepsilon_{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon_{\frac{n+1}{2}})x+1\right]\\&=(x-1)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right)\\&=(x-1)\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right).\end{aligned}$$

当 n 为偶数时，有

$$\begin{aligned}x^n-1&=(x-1)(x+1)\left[x^2-(\varepsilon_1+\varepsilon_{n-1})x+1\right]\cdots\\&\qquad\left[x^2-(\varepsilon_{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon_{\frac{n+1}{2}})x+1\right]\\&=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}\left(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1\right).\end{aligned}$$

例 11 求下列多项式的有理根：

(1) $x^3-6x^2+15x-14$;

(2) $4x^4-7x^2-5x-1$;

(3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$.

解 (1) $f(x)$是首项系数为 1 的多项式，因为是整系数，故若有有理根，必为整数根，且为常数项 -14 的因式，即可能是±1，±2，±7，±14. 又由 $f(2)=0$ 知，2 是 $f(x)$的有理根.

经验证，2 是 $f(x)$的单根.

(2) $f(x)$的首项系数是 4 的多项式，故 $f(x)$的有理根化为既约分数后，分母必为 4 的因式，分子为常数项 -1 的因式，即可能

是$\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4}$. 又由$f\left(\frac{-1}{2}\right)=0$知，$-\frac{1}{2}$是$f(x)$的有理根.

经验证，$-\frac{1}{2}$是$f(x)$的二重根.

(3) 同题(1)、(2)，$f(x)$有理根的可能值为$\pm1,\pm3$. 由$f(-1)=0,f(3)=0$知，$-1,3$是$f(x)$的有理根.

经验证，-1是$f(x)$的4重根，3为$f(x)$的单根.

验证一般用综合除法进行.

例 12 证明：$x^n+ax^{n-m}+b$不能有不为零的重数大于2的根.

证 $$f(x)=x^n+ax^{n-m}+b,$$

$$f'(x)=nx^{n-1}+a(n-m)x^{n-m-1}=x^{n-m-1}[nx^m+a(n-m)].$$

设$g(x)=nx^m+a(n-m)$，则$g'(x)=mnx^{m-1}$. 而$g(x)$没有不等于零的重根，从而$f(x)$不可能有不为零的重数大于2的根.

例 13 证明：若$f(x)\mid f(x^n)$，则$f(x)$的根只能是零或单位根.

证 若α是$f(x)$的根，则由$f(x)\mid f(x^n)$，知α也是$f(x^n)$的根，从而$f(\alpha^n)=0$，故α^n又是$f(x)$的根. 如此继续，则知$\alpha,\alpha^n,\alpha^{n^2}$，…都是$f(x)$的根.

若$f(x)$是m次多项式，则$f(x)$最多只能有m个不同的根，即存在正整数$k>l$，使得

$$\alpha^{n^l}=\alpha^{n^k}，即\ \alpha^{n^l}(\alpha^{n^k-n^l}-1)=0,$$

故α或为零或为单位根.

例 14 若$f'(x)\mid f(x)$，证明：$f(x)$有n重根，其中$n=\partial(f(x))$.

证 设$f'(x)$所有互不相同的根为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，其重数分别为$m_1,m_2,\cdots,m_s$，则

$$m_1+m_2+\cdots+m_s=n-1. \qquad ①$$

因为$f'(x)\mid f(x)$，故$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$也是$f(x)$的根，重数分别

为 $m_1+1, m_2+1, \cdots, m_s+1$，则

$$(m_1+1)+(m_2+1)+\cdots+(m_s+1)=n. \qquad ②$$

比较式①、式②得 $n-s=n-1 \Longrightarrow s=1$. 所以，$f'(x)$ 只有一个根 α，是 $n-1$ 重根，从而 α 是 $f(x)$ 的 n 重根.

例 15 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不同的数，而

$$F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

证明：(1) $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1$；

(2) 任意多项式 $f(x)$ 用 $F(x)$ 除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{F(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

证 (1) 因为

$$\frac{F(x)}{x-a_i}=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n),$$

但是 $F'(x)=(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)+(x-a_1)(x-a_3)\cdots(x-a_n)+(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})$,

$$F'(a_i)=(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n),$$

所以 $\dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=\dfrac{(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)}{(a_i-a_1)\cdots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\cdots(a_i-a_n)}$.

用反证法. 若 $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}-1\neq 0$，则其次数不大于 $n-1$. 但要有 n 重根是不可能的，故必有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1.$$

(2) 令 $r(x)=\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$，则多项式 $f(x)-r(x)$ 有根 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，从而 $F(x) \mid f(x)-r(x)$.

设 $f(x)-r(x)=F(x)g(x)$,

则
$$f(x)=F(x)g(x)+r(x),$$
其中 $r(x)=0$ 或者 $\partial(r(x))<n$，即 $r(x)$ 为 $F(x)$ 除 $f(x)$ 所得的

余式.

例 16 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $F(x)$ 同例 15，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是任意 n 个数，多项式

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F(a_i)}$$

适合条件 $L(a_i)=b_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则上式称为**拉格朗日插值公式**. 利用上面的公式求：

(1) 一个次数小于 4 的多项式 $f(x)$，它适合条件 $f(2)=3$，$f(3)=1$，$f(4)=0$，$f(5)=2$；

(2) 一个二次多项式 $f(x)$，它在 $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值；

(3) 一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$，有 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f(2)=5$，$f(3)=10$.

解 (1) 在例 15 中，取 $n=4$；$a_1=2, a_2=3, a_3=4, a_4=5$；$b_1=3, b_2=-1, b_3=0, b_4=2$；$F(x)=(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，则求得多项式

$$f(x)=L(x)=\frac{3(x-3)(x-4)(x-5)}{(2-3)(2-4)(2-5)}-\frac{(x-2)(x-4)(x-5)}{(3-2)(3-4)(3-5)}$$
$$+\frac{2(x-2)(x-3)(x-4)}{(5-2)(5-3)(5-4)}$$
$$=-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2-\frac{203}{6}x+42.$$

(2) 取 $n=3$；$a_1=0, a_2=\frac{\pi}{2}, a_3=\pi$；$b_1=0, b_2=1, b_3=0$；$F(x)=x\left(x-\frac{\pi}{2}\right)(x-\pi)$，则求得多项式

$$f(x)=L(x)=\frac{(x-0)(x-\pi)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)\left(\frac{\pi}{2}-\pi\right)}=-\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi).$$

(3) 取 $n=4$；$a_1=0, a_2=1, a_3=2, a_4=3$；$b_1=1, b_2=2, b_3=5$，

$b_4=10, F(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$,则求得多项式

$$f(x)=L(x)=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(0-1)(0-2)(0-3)}+\frac{2x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)(1-0)(1-2)(1-3)}$$

$$+\frac{5x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2)(2-0)(2-1)(2-3)}$$

$$+\frac{10x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)(3-0)(3-1)(3-2)}$$

$$=x^2+1.$$

这是满足条件的最低次多项式.因为一次多项式 $g(x)=ax+b$ 不可能有 $g(a_i)=b_i$ ($i=1,2,3,4$).

例 17 设 $f(x)$是一个整系数多项式,证明:若 $f(0)$与 $f(1)$都是奇数,则 $f(x)$不能有整数根.

证 用反证法.设整数 a 是 $f(x)$的根,则$(x-a)\mid f(x)$,即 $f(x)=(x-a)q(x)$,可以证明,$q(x)$也是整系数多项式.将 $x=0$ 与 $x=1$ 代入 $f(x)=(x-a)q(x)$得

$$f(0)=-aq(0),\quad f(1)=(1-a)q(1).$$

由于 $f(0),f(1)$都是奇数,则 a 与 $a-1$ 都应为奇数,但这是不可能的,故 $f(x)$没有整数根.

例 18 证明:多项式 $f(x)$除以 $ax-b$ ($a\neq 0$)所得余数为 $f\left(\frac{b}{a}\right)$,并求出 $f(x)=8x^3+9$ 除以 $2x+3$ 所得的余数.

证 设 $f(x)$除以 $ax-b$ 所得的商及余数分别为 $q(x)$和 r,则

$$f(x)=(ax-b)q(x)+r.$$

令 $x=\frac{b}{a}$,得 $$f\left(\frac{b}{a}\right)=r.$$

将 $f(x)=8x^3+9$ 除以 $2x+3$ 时,$a=2,b=-3$,故

$$r=f\left(-\frac{3}{2}\right)=8\left(-\frac{3}{2}\right)^3+9=-27+9=-18.$$

例 19 证明:若 $a\neq\pm 1$ 是整系数多项式 $f(x)$的整数根,则 $f(1)/(a-1),f(-1)/(a+1)$都是整数.

证 设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是整数.

因为$(x-a)\mid f(x)$,则有

$$f(x)=(x-a)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_1x+b_0).$$

展开后比较系数,得

$$b_{n-1}=a_n,\ b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1},\ \cdots,\ b_0=a_1+ab_1.$$

由于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 都是整数,故 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 也都是整数,所以

$$\frac{f(1)}{a-1}=\frac{(1-a)(b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_1+b_0)}{a-1}$$
$$=-b_{n-1}-b_{n-2}-\cdots-b_0$$

是整数. 同样

$$\frac{f(-1)}{a+1}=\frac{(-1-a)[b_{n-1}(-1)^{n-1}+b_{n-2}(-1)^{n-2}+\cdots+b_1(-1)+b_0]}{a+1}$$

也是整数.

第五节 有理系数多项式 多元多项式 对称多项式

主要内容

1. 如果一个非零的整系数多项式 $g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$ 的系数 $b_n,b_{n-1},\cdots,b_0$ 没有异于±1 的公因子,也就是说,它们是互素的,则 $g(x)$称为一个**本原多项式**.

2. **高斯(Gauss)引理** 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

3. **定理 1** 若一个非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

推论 设 $f(x),g(x)$是整系数多项式,且 $g(x)$是本原的. 若 $f(x)=g(x)h(x)$,其中 $h(x)$是有理系数多项式,则 $h(x)$一定是

整系数的.

4. 定理 2 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

是一个整系数多项式，r/s 是它的一个有理根，其中 r,s 互素，则必有 $s|a_n,r|a_0$. 特别地，若 $f(x)$ 的首项系数 $a_n=1$，则 $f(x)$ 的有理根都是整根，且都是 a_0 的因子.

5. 定理 3(艾森斯坦(Eisenstein)判别法) 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

是一个整系数多项式，若有一个素数 p，使得

(1) $p\nmid a_n$； (2) $p|a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_0$； (3) $p^2\nmid a_0$.

则 $f(x)$ 在有理数域上是不可约的.

6. 设 P 是一个数域，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 n 个文字，则形如

$$ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}\quad (a\in P,k_1,k_2,\cdots,k_n\text{ 为非负整数})$$

的式子，称为一个**单项式**.

一些单项式的和

$$\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

称为 n **元多项式(或多项式)**.

定义 1 所有系数在数域 P 中的 n 元多项式的全体，称为数域 P 上的 n **元多项式环**，记为 $P[x_1,x_2,\cdots,x_n]$.

7. 关于字典排列法，有

定理 4 当 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0,g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$ 时，乘积 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项等于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项与 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的首项的乘积.

推论 1 若 $f_i\neq 0,i=1,2,\cdots,m$，则 $f_1f_2\cdots f_m$ 的首项等于每个首项的乘积.

推论 2 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0,g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0$，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0.$$

8. 若多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n} a_{k_1k_2\cdots k_n}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$$

中每个单项式都是 m 次的，则将此多项式称为 **m 次齐次多项式**.

两个齐次多项式的乘积仍是齐次多项式.

9. 定义 2 n 元多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$，如果对于任意的 i,j，$1\leqslant i<j\leqslant n$，都有

$$f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n),$$

则称此多项式为**对称多项式**.

对称多项式的和、积及对称多项式的多项式还是对称多项式.

$$\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n,$$
$$\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n,$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n=x_1x_2\cdots x_n,$$

称为**初等对称多项式**. 任一对称多项式都能表成初等对称多项式的多项式.

10. 对称多项式基本定理 对于任意一个 n 元对称多项式，存在唯一的 n 元对称多项式 $\varphi(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\varphi(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n).$$

疑难解析

1. 求有理系数多项式 $f(x)$ 的有理根有哪些步骤?

答 一般步骤如下：

(1) 化 $f(x)$ 为整系数多项式；

(2) 由首项系数 a_n 与常数项 a_0 写出全部待验有理数 q/p，其中 p 为 a_n 的正因子，q 为 a_0 的因子，且 p,q 互素；

(3) 计算 $\dfrac{f(1)}{p-q}$ 与 $\dfrac{f(-1)}{p+q}$，放弃不同时使 $\dfrac{f(1)}{p-q}$ 与 $\dfrac{f(-1)}{p+q}$ 为整数的待验有理数 $\dfrac{q}{p}$；

(4) 对余下的有理数用综合除法逐一验证.

2. 用艾森斯坦判别法判别一个整系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上是否可约，要注意哪些问题？

答 要注意以下问题：

(1) 用来检验的数 p 必须是素数.

(2) 艾森斯坦判别法是判别整系数多项式在有理数域上不可约的一个充分条件. 当所有条件都满足时，才能判定不可约；当条件有一条不满足时，不能下任何结论，只能考虑用其它方法来判别.

事实上，有时要对多项式进行变换后再判别. 如 $f(x)=x^4-x^3+3x^2-7x+10$ 经过变换 $x=y+1$，化为 $\varphi(y)=f(y+1)=y^4+3y^3+6y^2+6$，取 $p=3$，则由艾森斯坦判别法知，$\varphi(y)$ 在有理数域上不可约，即 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

对次数不小于 2 的有理系数多项式，如果没有有理根，只能说它没有一次因式，可能还有别的因式，故不能据此断言其不可约.

3. 用字典排列法将多项式表示为对称多项式的一般步骤是什么？

答 字典排列法也称逐次减去首项法，其一般步骤是：

(1) 找出首项 $a_n x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$，$k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_n$；

(2) 写出 φ_1：$\varphi_1 = a_n \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \cdots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} \sigma_n^{k_n}$；

(3) 作 $f_1 = f - \varphi_1$，并化简.

(4) 再对 f_1 继续步骤(1)、(2)，如此反复，直至

$$f_k = f_{k-1} - \varphi_k = 0,$$

则

$$f = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_k.$$

4. 用待定系数法将对称多项式表为初等对称多项式的一般步骤是什么？

答 (1) 根据 f 的首项指标组，写出所有可能指标组. 指标组 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 必须满足：

前面的指标组先于后面指标组. $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \cdots \geqslant k_n$. 若 f 为齐次多项式，指标组 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 必须满足 $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \deg f$ ($\deg$ 表示次数).

(2) 由指标组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$写出对应的 σ 的方幂的乘积 $\sigma_1^{k_1-k_2}\sigma_2^{k_2-k_3}\cdots\sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n}\sigma_n^{k_n}$.

(3) 由所有这些方幂，写出所求多项式的一般形式，其首项系数即为 f 的首项系数. 其余各项系数用 $A,B,C,\cdots$代替.

(4) 以适当的 x_i $(i=1,2,\cdots,n)$值代入(2)中所得表达式，得到一个关于 $A,B,C,\cdots$的线性方程组，解此方程组即求得 $A,B,C,\cdots$的值.

方法、技巧与典型例题分析

求多项式的有理根(上节例 11)必须按疑难解析 1 的步骤进行，否则将出现错误.

例 1 求多项式 $f(x)=x^4-5x^3+11x^2-16x+12$ 的有理根.

解 $f(x)$是首项系数是 1 的整系数多项式，故其有理根均为整数，且均为常数项 12 的因子，有$\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$.

$f(1)=3, f(-1)=45$，故±1 不是 $f(x)$的有理根. 计算$\dfrac{f(1)}{1-a}$与$\dfrac{f(-1)}{1+a}$得，$a=\pm2,4$ 时为整数.

应用综合除法于 $a=2,-2,4$ 检验

2	1	-5	11	-16	12
		2	-6	10	-12
2	1	-3	5	-6	0
		2	-2	6	
2	1	-1	3	0	
		2	2		
	1	1	$5\neq0$		

-2	1	-1	3
		-2	6
	1	-3	$9\neq0$

4	1	-1	3
		4	12
	1	3	$15\neq0$

所以 2 是 $f(x)$的二重根，$-2,4$ 不是有理根.

例 2 求出所有使 $f(x)=x^5+mx+1$ 在有理数域上可约的整数 m.

解 分有和无有理根情形讨论：

(1) 若 $f(x)$无有理根，则 $f(x)$必可分解成一个三次多项式

与一个二次多项式之积，即

$$f(x)=(x^3+ax^2+bx+1)(x^2+cx+1), \quad ①$$

或 $$f(x)=(x^3+ax^2+bx-1)(x^2+cx-1), \quad ②$$

式中 a,b,c 均为整数. 展开式①，经比较得

$$a+c=0,\ ac+b+1=0,\ a+bc+1=0,\ b+c=m,$$

解得 $a=-1,b=0,c=1,m=1$. 展开式②，经比较得

$$a+c=0,\ ac+b-1=0,\ -a+bc-1=0,\ b+c=-m,$$

没有整数解.

(2) 若 $f(x)$有有理根，则 $f(1)=0$ 或 $f(-1)=0$，

当 $f(1)=1+m+1=0$ 时$\Rightarrow m=-2$.

当 $f(-1)=-1+m-1=0$ 时$\Rightarrow m=0$.

综上所得，知 $m=0,1,-2$ 时，$f(x)$在有理数域上可约.

例 3 下列多项式在有理数域上是否可约?

(1) x^2+1;

(2) $x^4-8x^3+12x^2+2$;

(3) x^6+x^3+1;

(4) x^p+px+1，p 为奇素数;

(5) $x^4+4kx+1$，k 为整数.

解 可以用疑难解析 1 中因式法讨论，也可以用疑难解析 2 中艾森斯坦判别法讨论.

(1) 因为常数项只有两个因式±1，而±1 都不是 x^2+1 的根，所以 $f(x)$在有理数域上不可约.

(2) 取素数 $p=2$，则 $2\nmid1,2|-8,2|12,2|2$，但 $2^2\nmid2$，故由艾森斯坦判别法知，$f(x)$在有理数域上不可约.

(3) 作变换 $x=y+1$ 代入 $f(x)$，化为

$$\varphi(y)=f(y+1)=y^6+6y^5+15y^4+21y^3+18y^2+9y+3.$$

取 $p=3$，则 $3\nmid1,3|6,3|15,3|21,3|18,3|9,3|3$，但 $3^2\nmid3$，故由艾森斯坦判别法知，$\varphi(y)$在有理数域上不可约. 从而 $f(x)$在有理数域上不可约.

(4) 作代换 $x=y-1$ 代入 $f(x)$，得

$$\varphi(y)=y^p-C_p^1y^{p-1}+\cdots-C_p^{p-2}y^2+(C_p^{p-1}+p)y-p,$$

因为 $p|C_p^i$，$i=1,2,\cdots,p-1$，所以由艾森斯坦判别法知，$\varphi(y)$在有理数域上不可约，从而 $f(x)$在有理数域上不可约.

(5) 作代换 $x=y+1$ 代入 $f(x)$得

$$\varphi(y)=y^4+4y^3+6y^2+(4k+4)y+4k+2.$$

取 $p=2$，则 $2\nmid 1, 2|4, 2|6, 2|4k+4, 2|4k+2$，但 $2^2\nmid(4k+2)$，故由艾森斯坦判别法知，$g(y)$在有理数域上不可约，从而 $f(x)$在有理数域上不可约.

例 4 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ 是有理系数多项式，证明：若 $f(x)$没有有理根，则

$f(x)$在有理数域上可约$\Longleftrightarrow$存在有理系数的二次多项式$g(x)$及一次式或常数 $h(x)$，使得 $f(x)=g^2(x)-h^2(x)$.

证 充分性是显然的.

必要性 设 $f(x)$在有理数域上可约，因为 $f(x)$没有有理根，则必有

$f(x)=(x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)$，$a_i,b_i$ $(i=1,2)$为有理数.

从而有

$$\begin{aligned}f(x)&=g^2(x)-h^2(x)\\&=\left(x^2+\frac{a_1+a_2}{2}x+\frac{b_1+b_2}{2}\right)\left(\frac{a_1-a_2}{2}x+\frac{b_1-b_2}{2}\right).\end{aligned}$$

例 5 若有理系数多项式 $f(x)$有无理根 $a+b\sqrt{d}$，其中 a,b,d 是有理数，$\sqrt{d}$是无理数，$b\neq0$，证明：$a-b\sqrt{d}$也是 $f(x)$的根.

证 令 $g(x)=[x-(a+b\sqrt{d})][x-(a-b\sqrt{d})]$

$$=x^2-2ax+a^2-ab^2,$$

则 $f(x)$与 $g(x)$都是有理系数多项式，它们的最大公因式也是有理系数多项式. 从而 $f(x)$与 $g(x)$或者互素，或者有最大公因式 $g(x)$. 因为 $f(x)$与 $g(x)$有公共根 $a+b\sqrt{d}$，不互素，所以必有最

大公因式 $g(x)$，即 $g(x)\mid f(x)$，$a-b\sqrt{d}$也是 $f(x)$的根.

例 6 用初等对称多项式表出下列对称多项式：

(1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$；

(2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$；

(3) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$；

(4) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_2^2x_4^2+x_3^2x_4^2$；

(5) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$；

(6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$.

解 用字典排列法或待定系数法均可.字典排列法步骤见疑难解析 3，待定系数法步骤见疑难解析 4.

(1) 因为 $f(x)$的首项为 $x_1^2x_2$，作 $\varphi_1=\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$，则

$$\begin{aligned}f_1=f-\varphi_1&=(x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2)\\&\quad-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\\&=-3x_1x_2x_3=-3\sigma_3,\end{aligned}$$

所以
$$f=f_1+\varphi_1=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3.$$

(2) $f(x)=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+2x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$，作 $\varphi_1=\sigma^{2-1}\sigma_2^{1-0}\sigma_3^0=\sigma_1\sigma_2$，则

$$f_1=f-\varphi_1=-x_1x_2x_3=-\sigma_3,$$

所以
$$f=f_1+\varphi_1=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3.$$

(3) $f(x)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ 是一个六次齐次多项式，写出所有从首项开始的所有六次指数组及对应的初等对称多项式方幂的乘积，并列表 1-1 如下.

表 1-1 六次指数组及对应的乘积

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
4 2 0	$\sigma_1^{4-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0=\sigma_1^2\sigma_2^2$
4 1 1	$\sigma_1^{4-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_1^3\sigma_3$
3 3 0	$\sigma_1^{3-3}\sigma_2^{3-0}\sigma_3^0=\sigma_2^3$
3 2 1	$\sigma_1^{3-2}\sigma_2^{2-1}\sigma_3^1=\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2 2 2	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-2}\sigma_3^2=\sigma_3^2$

设 $$f=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2 \quad ③$$

为恒等式. 赋 x_1,x_2,x_3 以特定数值,经计算得表 1-2 如下所示。

表 1-2 计算结果表

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
0	1	1	2	1	0	0
1	1	−1	1	−1	−1	0
1	1	−2	0	−3	−2	0
1	1	1	3	3	1	0

将结果代入式③,得

$$0=4+b,\quad 0=1-a-b+c+d,$$

$$0=-27b+4d,\quad 0=81+27a+27b+9c+d,$$

解得 $$a=-4,\quad b=-4,\quad c=18,\quad d=-27.$$

从而 $$f=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3-27\sigma_3^2.$$

(4) f 的首项是 $x_1^2x_2^2$,为四次齐次多项式. 写出所有从首项开始的四次指数组及对应的初等对称多项式方幂的乘积,列表 1-3 如下所示 .

表 1-3 四次指数组及对应的乘积

指 数 组	对应 σ_i 的方幂乘积
2 2 0 0	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0\sigma_4^0=\sigma_2^2$
2 1 1 0	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}\sigma_4^0=\sigma_1\sigma_3$
1 1 1 1	$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^1=\sigma_4$

设 $$f=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_2+b\sigma_4, \quad ④$$

赋 x_1,x_2,x_3,x_4 以特殊值,计算得表 1-4 如下所示 .

表 1-4 计算结果表

x_1	x_2	x_3	x_4	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f
1	1	1	0	3	3	1	0	3
1	1	1	1	4	6	4	1	6

代入式④,得

$$3=9+3a,\quad 6=36+16a+b,$$

解得 $a=-2,b=2$,从而

$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2+2\sigma_4.$$

(5) 将 f 展开,得

$$\begin{aligned}f&=x_1^2x_2^2x_3^2+(x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2)\\&\quad+(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)+x_1x_2x_3\\&=\sigma_3^2+\sigma_3(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+f_1+\sigma_3,\end{aligned}$$

其中 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$$=\sigma_1^2-2\sigma_2,$$

而 $f_1=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_4^2$ 是首项为 $x_1^2x_2^2$ 的四次齐次多项式,用相同的方次,列表 1-5 如下所示。

表 1-5 四次指数组及对应的乘积

指 数 组	对应 σ_i 的方幂乘积
2 2 0	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\sigma_3^0=\sigma_2^2$
2 1 1	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^1=\sigma_1\sigma_3$

设 $f_1=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_3$,赋 x_1,x_2,x_3 以特定值,得表 1-6 .

表 1-6 计算结果表

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
1	1	1	3	3	1	3

代入 f_1 得 $3=9+3a$,解出 $a=-2$,即 $f_1=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2$. 于是

$$f=\sigma_3^2+\sigma_3(\sigma_1^2-2\sigma_2)+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2+\sigma_3.$$

例 7 用初等对称多项式表出下列 n 元对称多项式:

(1) $\sum x_1^4$; (2) $\sum x_1^2x_2x_3$;

(3) $\sum x_1^2x_2^2$; (4) $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$.

($\sum ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 表示所有由 $ax_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 经对换得到的项的和)

解 与例 6 相同,用待定系数法.

(1) 列表 1-7 如下所示.

表 1-7 指数组及对应的乘积

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
4 0 0 0 … 0	$\sigma_1^{4-0}\sigma_2^{0-0}\cdots\sigma_n^0=\sigma_1^4$
3 1 0 0 … 0	$\sigma_1^{3-1}\sigma_2^{1-0}\cdots\sigma_n^0=\sigma_1^2\sigma_2$
2 2 0 0 … 0	$\sigma_1^{2-2}\sigma_2^{2-0}\cdots\sigma_n^0=\sigma_2^2$
2 1 1 0 … 0	$\sigma_1^{2-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-0}\cdots\sigma_n^0=\sigma_1\sigma_3$
1 1 1 1 … 0	$\sigma_1^{1-1}\sigma_2^{1-1}\sigma_3^{1-1}\sigma_4^{1-0}\cdots\sigma_n^0=\sigma_4$

设
$$f=\sigma_1^4+a\sigma_1^2\sigma_2+b\sigma_2^2+c\sigma_1\sigma_3+d\sigma_4,\qquad ⑤$$
赋 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 以特殊值,计算得表 1-8 如下所示 .

表 1-8 计算结果表

x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f
1	−1	0	0	…	0	0	−1	0	0	2
1	1	0	0	…	0	2	1	0	0	2
1	1	1	0	…	0	3	3	1	0	3
1	1	−1	−1	…	0	0	−2	0	1	4

分别代入式⑤,得

$$2=b,\ 2=16+4a+b,\ 3=81+27a+96+3c,\ 4=4b+d,$$

解得 $a=-4,b=2,c=4,d=-4$. 所以

$$\sum x_1^4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+4\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4.$$

(2) 分情形讨论:

当 $n=3$ 时,

$$\sum x_1^2x_2x_3=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=\sigma_1\sigma_3;$$

当 $n\geqslant4$ 时,f 首项为 $x_1^2x_2x_3$,列表 1-9 如下所示 .

表 1-9 指数组及对应的乘积

指数组	对应 σ_i 的方幂乘积
2 1 1 0 0 … 0	$\sigma_1\sigma_3$
1 1 1 1 0 … 0	σ_4

设 $f=\sigma_1\sigma_3+a\sigma_4$. 赋值 $x_1=x_2=x_3=x_4=1, x_5=\cdots=x_n=0$，得 $\sigma_1=4, \sigma_2=6, \sigma_3=4, \sigma_4=1, f=12$，代入 f 得式 $12=16+a$. 从而

$$f=\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4.$$

(3) 分情形讨论：

当 $n=2$ 时，$\sum x_1^2x_2^2=x_1^2x_2^2=\sigma_2^2$；

当 $n=3$ 时，由首项 $x_1^2x_2^2$，列表 1-10 如下所示．

表 1-10 指数组及对应的乘积

指 数 组	对应 σ_i 的方幂乘积
2 2 0	σ_2^2
2 1 1	$\sigma_1\sigma_3$

设 $f=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_3$. 赋值 $x_1=x_2=x_3=1$，得 $\sigma_1=3, \sigma_3=3, \sigma_3=1, f=3$. 代入 f 式得 $3=9+3a$，解出 $a=-2$. 所以

$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3.$$

当 $n\geqslant 4$ 时，由首项 $x_1^2x_2^2$，列表 1-11 如下所示．

表 1-11 指数组及对应的乘积

指 数 组	对应 σ_i 的方幂乘积
2 2 0 0 … 0	σ_2^2
2 1 1 0 … 0	$\sigma_1\sigma_3$
1 1 1 1 … 0	σ_4

设 $f=\sigma_2^2+a\sigma_1\sigma_3+b\sigma_4$. 赋 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，以特殊值，得表 1-12 如下所示．

表 1-12 计算结果表

x_1	x_2	x_3	x_4	…	x_n	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	f
1	1	1	0	…	0	3	3	1	0	3
1	1	1	1	…	0	4	6	4	1	6

代入 f 式得 $3=9+3a, 6=36+16+b$，解出 $a=-2, b=2$，所以

$$f=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4.$$

(4) 当 $n=4$ 时，$f=\sum x_1^2x_2^2x_3x_4=\sigma_2\sigma_4$；

当 $n=5$ 时，由首项 $x_1^2x_2^2x_3x_4$，列表 1-13 如下所示．

表 1-13　指数组及对应的乘积

指　数　组	对应 σ_i 的方幂乘积
2　2　1　1　0	$\sigma_2\sigma_4$
2　1　1　1　1	$\sigma_1\sigma_5$

设 $f=\sigma_2\sigma_4+a\sigma_1\sigma_5$．赋值 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=1$，得 $\sigma_1=5,\sigma_2=10,\sigma_3=10,\sigma_4=5,\sigma_5=1,f=30$．代入 f 式得 $30=50+5a$，解出 $a=-4$，故 $f=\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5$．

当 $n\geqslant 6$ 时，由首项 $x_1^2x_2^2x_3x_4$，列表 1-14 如下所示．

表 1-14　指数组及对应的乘积

指　数　组	对应 σ_i 的方幂乘积
2　2　1　1　0　0　…　0	$\sigma_2\sigma_4$
2　1　1　1　1　0　…　0	$\sigma_1\sigma_5$
1　1　1　1　1　1　…　0	σ_6

设 $f=\sigma_2\sigma_4+a\sigma_1\sigma_5+b\sigma_6$．赋值、列表 1-15 如下所示．

表 1-15　计算结果表

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	…	x_n	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_5	σ_6	f
1	1	1	1	1	0	…	0	5	10	10	5	1	0	30
1	1	1	1	1	1	…	0	6	15	20	15	6	1	90

代入 f 式得 $30=50+5a,90=225+36a+b$，解出 $a=-4,b=9$，所以

$$f=\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6.$$

例 8　设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程 $5x^3-6x^2+7x-8=0$ 的三个根，计算

$$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2).$$

解　由根与系数的关系可以得出

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\frac{6}{5},\quad \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3=\frac{7}{5},\quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3=\frac{8}{5}.$$

再化对称多项式

$$f=(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)(x_2^2+x_2x_3+x_3^2)(x_1^2+x_1x_3+x_3^2)$$

为初等对称多项式的多项式. 由首项 $x_1^4x_2^2$ 列表 1-16 如下所示 .

表 1-16 指数组及对应的乘积

指 数 组	对应 σ_i 的方幂乘积
4 2 0	$\sigma_1^2\sigma_2^2$
4 1 1	$\sigma_1^3\sigma_2$
3 3 0	σ_2^3
3 2 1	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
2 2 0	σ_3^2

设 $$f=\sigma_1^2\sigma_2^2+a\sigma_1^3\sigma_3+b\sigma_2^3+c\sigma_1\sigma_2\sigma_3+d\sigma_3^2. \qquad ⑥$$

赋值计算,得表 1-17 如下所示 .

表 1-17 计算结果表

x_1	x_2	x_3	σ_1	σ_2	σ_3	f
0	1	1	2	1	0	3
1	1	-1	1	-1	-1	3
1	1	-2	0	-3	-2	27
1	1	1	3	3	1	27

将结果代入式⑥,得

$$3=4+b,\quad 3=1-a-b+c+d,$$
$$27=-27b+4d,\quad 27=81+27a+27b+9c+d,$$

解出 $a=-1,b=-1,c=0,d=0$,所以

$$f=\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3,$$

令 $x_1=\alpha_1,x_2=\alpha_2,x_3=\alpha_3$,则 $\sigma_1=6/5,\sigma_2=7/5,\sigma_3=8/5$,于是

$$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2)$$
$$=\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_1^3\sigma_3-\sigma_2^3=-1\ 679/625.$$

例 9 证明:三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等

差数列的充分必要条件是

$$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0.$$

证 必要性 设方程的三个根成等差数列，分别为 $\alpha-d,\alpha,\alpha+d$，则由根与系数关系，得

$$\alpha-d+\alpha+\alpha+d=-a_1\Rightarrow\alpha=-a_1/3.$$

代入原方程得

$$\left(-\frac{a_1}{3}\right)^3+a_1\left(-\frac{a_1}{3}\right)^2+a_2\left(-\frac{a_1}{3}\right)+a_3=0,$$

化简即有 $$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0.$$

充分性 设 $2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0$，取 $\alpha=-\frac{a_1}{3}$代入原方程得

$$\left(-\frac{a_1}{3}\right)^3+a_1\left(-\frac{a_1}{3}\right)^2+a_2\left(-\frac{a_1}{3}\right)+a_3=0,$$

知 $\alpha=-\frac{a_1}{3}$是原方程的根.

设另两根为 β,γ，则由根与系数关系知，$\alpha+\beta+\gamma=-a_1$，所以 $\beta-\alpha=\alpha-\gamma$，即 α,β,γ 成等差数列.

例 10 证明:若方程 $x^3+px^2+qx+r=0$ 的三个根成等比数列，则 $q^3=p^3r$.

证 设方程的三个根为 $\alpha,\alpha t,\alpha t^2$，则由根与系数关系得

$$\alpha+\alpha t+\alpha t^2=-p,\ \alpha^2t+\alpha^2t^2+\alpha^2t^3=q,\ \alpha^3t^3=-r,$$

由此解得 $q^3=p^3r$.

例 11 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是方程 $x_n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根，证明:$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的对称多项式可以表成 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$的多项式.

证 设 $f(x_2,x_3,\cdots,x_n)$为 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的任一对称多项式，则由对称多项式基本定理，有

$$f(x_2,x_3,\cdots,x_n)=g(\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma_{n-1}'),\tag{7}$$

式中 $\sigma_1',\sigma_2',\cdots,\sigma_{n-1}'$是关于 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的全部初等对称多项式.

令 $\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n$ 为关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式，则有

$$\sigma_1'=\sigma_1-x_1,\ \sigma_2'=\sigma_2-x_1\sigma_1',\cdots,\sigma_{n-1}'=\sigma_{n-1}-x_1\sigma_{n-2}'. \qquad ⑧$$

因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是原方程的根，故由根与系数的关系知

$$\sigma_1=-a_1,\ \sigma_2=a_2,\ \cdots,\ \sigma_{n-1}=(-1)^{n-1}a_{n-1}. \qquad ⑨$$

代入式⑧可知，σ_i' 是 $x_1,a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的多项式，

$$\sigma_i'=h_i(x_1,a_1,\cdots,a_{n-1}),\ i=1,2,\cdots,n-1.$$

将其代入式⑦右端，即知 $f(x_2,x_3,\cdots,x_n)$ 可表为 x_1 与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式.

例 12 设

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$
$$=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n,$$

且 $$S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k,\quad k=0,1,2,\cdots$$

证明：(1) $x^{k+1}f'(x)=(S_0x^k+S_1x^{k-1}+\cdots+S_{k-1}x+S_k)f(x)+g(x)$，其中 $\partial(g(x))<n$ 或 $g(x)=0$；

(2) 由上式证明牛顿(Newton)公式：

$$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^kk\sigma_k=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n;$$

$$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_nS_{k-n}=0,\qquad k>n.$$

证 先对 n 用数学归纳法证得

$$f(x)=\sum_{i=1}^n\frac{f(x)}{x-x_i},$$

于是

$$x^{k+1}f'(x)=\sum_{i=1}^n\frac{x^{k+1}f(x)}{x-x_i}$$
$$=\sum_{i=1}^n\frac{(x^{k+1}-x_i^{k+1}+x_i^{k+1})f(x)}{x-x_i}$$
$$=f(x)\sum_{i=1}^n\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}+\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x). \qquad ⑩$$

令 $g(x)=\sum_{i=1}^n\frac{x_i^{k+1}}{x-x_i}f(x)$，则 $\partial(g(x))<n$ 或 $g(x)=0$.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x^{k+1}-x_i^{k+1}}{x-x_i}=\sum_{i=1}^{n}(x^k+x_ix^{k-1}+\cdots+x_i^{k-1}x+x_i^k)$$

$$=nx^k+(x_1+\cdots+x_n)x^{k-1}+\cdots$$

$$+(x_1^{k-1}+\cdots+x_n^{k-1})x+(x_1^k+\cdots+x_n^k)$$

$$=S_0x^k+S_1x^{k-1}+\cdots+S_{k-1}x+S_k.$$

由式⑩可知

$$x^{k+1}f'(x)=(S_0x^k+S_1x^{k-1}+\cdots+S_{k-1}x+S_k)f(x)+g(x).$$

(2) 由 $f(x)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$，故

$$x^{k+1}f'(x)=x^{k+1}[nx^{n-1}-(n-1)\sigma_1x^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}]$$

$$=nx^{n+k}-(n-1)\sigma_1x^{n+k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}x^{k+1}. \quad ⑪$$

利用题(1)的结果，又有

$$x^{k+1}f'(x)=(S_0x^k+S_1x^{k-1}+\cdots+S_{k-1}x+S_k)$$

$$\cdot(x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n)+g(x). \quad ⑫$$

故比较式⑪与式⑫可得：

当 $k\leqslant n$ 时，有

$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}-\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^kk\sigma_k=0$；

当 $k>n$ 时，有

$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\sigma_{n-1}S_{k-n+1}+(-1)^n\sigma_nS_{k-n}=0.$

例 13 根据牛顿公式，用初等对称多项式表示 S_2,S_3,S_4,S_5,S_6.

解 对 $S_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$ 用牛顿公式讨论.

(1) 当 $n\geqslant6$ 时，对 $1\leqslant k\leqslant6$ 得

$S_1=\sigma_1$，

$S_2-\sigma_1S_1+2\sigma_2=0\Rightarrow S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$，

$S_3-\sigma_1S_2+\sigma_2S_1-3\sigma_3=0\Rightarrow S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$，

$S_4-\sigma_1S_3+\sigma_2S_2-\sigma_3S_1+4\sigma_4=0$

$\Rightarrow S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$，

$S_5-\sigma_1S_4+\sigma_2S_3-\sigma_3S_2+\sigma_4S_1-5\sigma_5=0$

$\Rightarrow S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3+5\sigma_5$，

$S_6-\sigma_1S_5+\sigma_2S_4-\sigma_3S_3+\sigma_4S_2-\sigma_5S_1+6\sigma_6=0$

$$\Rightarrow S_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$
$$+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^2+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2-6\sigma_6.$$

(2) 当 $n=5$ 时，S_2,S_3,S_4,S_5 同题(1)，但对 $k=6$ 得

$$S_6-\sigma_1 S_5+\sigma_2 S_4-\sigma_3 S_3+\sigma_4 S_2-\sigma_5 S_1=0,$$

于是

$$S_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$
$$+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2-6\sigma_6.$$

(3) 当 $n=4$ 时，S_2,S_3,S_4 同题(1)，S_6 同题(2). 对 $k=5$ 用同样方法可求得

$$S_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3.$$

(4) 当 $n=3$ 时，S_2,S_3 同题(1)，S_5 同题(3)，S_6 同题(2).

$$S_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2.$$

(5) 当 $n=2$ 时，S_2 同题(1)，S_4 同题(4)，S_5 同题(3)，S_6 同题(2).

$$S_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2.$$

例 14 证明：若对某个六次方程有 $S_1=S_3=0$，则

$$\frac{S_7}{7}=\frac{S_5}{5}\cdot\frac{S_2}{2}.$$

证 因为 $n=6$，所以利用例 13 结果可求得

$$S_2=\sigma_1^2-2\sigma_2=2\sigma_2\Rightarrow-\sigma_2=S_2/2,$$
$$S_3=3\sigma_3=0\Rightarrow\sigma_3=0,$$
$$S_5=5\sigma_5\Rightarrow\sigma_5=S_5/5,$$

又 $7>6$，由牛顿公式求得

$$S_7-\sigma_1 S_6+\sigma_2 S_5-\sigma_3 S_4+\sigma_4 S_3-\sigma_5 S_2+\sigma_6 S_1=0,$$

得 $S_7=-7\sigma_2\sigma_5$. 从而

$$\frac{S_7}{7}=-\sigma_2\sigma_5=\frac{S_5}{5}\cdot\frac{S_2}{2}.$$

例 15 求一个 n 次方程，使得 $S_1=S_2=\cdots=S_{n-1}=0$.

解 设所求方程为

$$x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n=0,$$

由题设条件知 $\sigma_1=S_1=0$. 根据牛顿公式,当 $k\leqslant n$ 时,有

$$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\sigma_2S_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^kk\sigma_k=0,$$

得 $$S_2-\sigma_1S_1+2\sigma_2=0\Rightarrow\sigma_2=0,$$

$$S_3-\sigma_1S_2+\sigma_2S_1-3\sigma_3=0\Rightarrow\sigma_3=0,\cdots$$

因此 $$\sigma_1=\sigma_2=\cdots=\sigma_{n-1}=0.$$

故所求方程为 $x^n+(-1)^n\sigma_n=0$,即 $x^n+a=0$.

例 16 求一个 n 次方程,使得 $S_2=S_3=\cdots=S_n=0$.

解 设所求方程为

$$x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n=0.$$

当 $k\leqslant n$ 时,由牛顿公式

$$S_k-\sigma_1S_{k-1}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^k\sigma_kk=0.$$

利用题设条件得 $(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}S_1+(-1)^kk\sigma_k=0$,

故 $$\sigma_k=\sigma_{k-1}S_1/k=\sigma_{k-1}\sigma_1/k\quad(k=2,3,\cdots,n).$$

于是 $$\sigma_i=\sigma_1^i/i!\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所求方程为 $$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{\sigma_1^i}{i!}\cdot x^{n-i}=0.$$

例 17 求以方程 $x^3+2x-1=0$ 的三个根的平方为根的方程.

解 设所求方程为 $x^3-ax^2+bx-c=0$,题设方程的三个根为 x_1,x_2,x_3,则

$$a=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$$=0^2-2\times2=-4;$$
$$b=x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$$
$$=(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)^2-2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)$$
$$=4-2\times1\times0=4;$$
$$c=x_1^2x_2^2x_3^2=1.$$

故所求方程为 $$x^3+4x^2+4x-1=0.$$

第二章 行 列 式

行列式计算是高等代数中的一种基本计算,行列式又是解线性方程组的重要工具.对行列式的概念与性质应该有充分的了解,必须熟悉行列式的计算规则,能够熟练地计算行列式.

第一节 排 列

主要内容

1. 定义 在一个排列中,若一对数的前后次序与大小顺序相反,则称之为一个**逆序**.一个排列中逆序的总数称为该排列的**逆序数**.

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**;逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

2. 定理 1 对换改变排列的奇偶性.

推论 在全部 n 级排列中,奇、偶排列的个数相等,各有 $n!/2$ 个.

3. 定理 2 任意一个 n 级排列与排列 $12\cdots n$ 都可以通过一系列对换互变,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

排列 $12\cdots n$ 称为**标准排列**.

疑难解析

为什么要讨论排列的逆序数?

答 在行列式中,行列式的项是由位于不同行与不同列的 n

个元素乘积构成的，元素所处的行（或列）的次序构成一个 n 级排列，而行列式中该项前面的符号就与这个排列的逆序数有关. 在确定行列式中某项的符号与研究行列式的性质时，都必须讨论该项的元素排列的奇偶性，因此，必须熟悉排列逆序数及其奇偶性.

方法、技巧与典型例题分析

要求能求排列的逆序数，能确定排列的奇偶性，能对排列奇偶性的改变进行讨论.

例 1 决定以下排列的逆序数，并确定排列的奇偶性.

(1) 134782695； (2) 217986354； (3) 987654321.

解 法 1：从首个数开始，逐个考察该数后面小于它的数的个数，求出总和.

法 2：从首个数开始，逐个考察在该数前面大于它的数的个数，求出总和.

(1) $\tau(134782695)=0+1+1+3+3+0+1+1=10,$

或 $\tau(134782695)=0+0+0+0+0+4+2+0+4=10,$

故 134782695 是偶排列.

(2) $\tau(217986354)=1+0+4+5+4+3+0+1=18,$

故 217986354 是偶排列.

(3) $\tau(987654321)=8+7+6+5+4+3+2+1=36,$

故 987654321 是偶排列.

例 2 选择 i 与 k 使

(1) $1274i56k9$ 成偶排列； (2) $1i25k4897$ 成奇排列.

解 (1) i 与 k 可能取值为 3,8. 若 $i=3,k=8$，则

$$\tau(127435689)=0+0+4+1+0+0+0+0=5,$$

是奇排列. 若 $i=8,k=3$，则

$$\tau(127485639)=0+0+4+1+3+1+0+1=10,$$

是偶排列. 故应取 $i=8,k=3$.

也可把 $i=8,k=3$ 视作对 $i=3,k=8$ 进行了一个对换，故

127485639 是偶排列.

(2) i 与 k 可能取值为 3,6. 若 $i=3,k=6$,则

$$\tau(132564897)=0+1+0+1+1+0+1+1=5,$$

故当 $i=3,k=6$ 时,132564897 为奇排列.

例 3 写出把排列 12435 变成排列 25341 的那些对换.

解 对换过程不是唯一的. 当然希望对换个数越少越好,看起来越明了越好. 如

$$12435 \xrightarrow{(4,3)} 12345 \xrightarrow{(1,2)} 21345 \xrightarrow{(1,5)} 25341.$$

例 4 决定排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数,并讨论它的奇偶性.

解 $\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+1=n(n-1)/2.$

当 $n=4k,4k+1$ 时,排列为偶排列.

当 $n=4k+2,4k+3$ 时,排列为奇排列.

例 5 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k,求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数.

解 因为对于元素 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任何两个不同的 x_i 与 x_j,在 $x_1x_2\cdots x_n$ 或 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 中必有一个且只有一个构成逆序,所以,这两个排列的逆序数之和应等于从 n 个元素中任取两个元素的组合数 $C_n^2=n(n-1)/2$. 由于 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k,故 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数为 $n(n-1)/2-k$.

例 6 设排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k,证明:可以经过 k 次对换,把 $x_1x_2\cdots x_n$ 变成排列 $123\cdots n$.

证 设在 $x_1x_2\cdots x_n$ 中,1 前面有 k_1 个数,2 前面大于 2 的有 k_2 个数……$n-1$ 前面大于 $n-1$ 的有 $n-1$ 个数,则

$$k=k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}.$$

将 1 与其前面的 k_1 个数进行 k_1 个自右向左的对换,便使 1 排在首位. 由于其余数的顺序不变,再将 2 与其前面大于 2 的 k_2 个数自右向左进行 k_2 个对换,便使 2 排在第 2 位. 如此继续,则对 $x_1x_2\cdots x_n$ 总共需进行 $k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}=k$ 次对换,便可把

$x_1x_2\cdots x_n$变成 $123\cdots n$.

事实上，往往是 $k<k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}$. 如排列 4132 有 4 个逆序，但只需进行两次对换即可变成 1234. 即

$$4132 \xrightarrow{(2,4)} 2134 \xrightarrow{(2,1)} 1234.$$

第二节　n 阶行列式及其性质

主 要 内 容

1. 定义 1　n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有取自不同行不同列的元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，$j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，该项带有负号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，该项带有正号，即

$$D_n=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

若将行列式的项记成 $a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，则

$$D_n=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

2. 行列式的性质：

(1) 行列互换(转置)，行列式不变.

(2) 以一数乘行列式等于用一数乘行列式的某行(列)的所有元素.

行列式某行(列)的公因子可以提到行列式外.

(3) 若行列式某行(列)的所有元素都可以写成两项之和，则此行列式可以写成两个行列式之和. 这两个行列式该行(列)的元

素分别为对应的两个加数之一，其余行(列)的元素不变.

(4) 若行列式中两行(列)相同，则行列式为零.

(5) 若行列式中有两行(列)元素成比例，则行列式为零.

(6) 将行列式中某行(列)元素的倍数加到另一行(列)的对应元素上去，行列式不变.

(7) 对换行列式中两行(列)元素的位置，行列式反号.

3. 一些特殊行列式的值：

(1) $$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & * & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

对角行列式　　上三角行列式　　下三角行列式

$$=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(2) $$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ * & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & * & \end{vmatrix}$$

次对角行列式　　次上三角行列式　　次下三角行列式

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

* 号处元素不全为零.

疑难解析

1. 为什么 $D_n=|a_{ij}|_n$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}, \qquad ①$$

式中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 级排列.

答 因为 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 n 级排列，所以 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是取自 D_n 的不同行不同列的 n 个元素的乘积.

若交换一般项中的两个元素 $a_{i_sj_s}$ 与 $a_{i_tj_t}$，则其行标排列由

$i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$变为$i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，其逆序数的奇偶性改变；列标排列$j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n$变为$j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n$，其逆序数的奇偶性也改变.但对换后两下标排列逆序数之和的奇偶性不改变.即有

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)+\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}.$$

所以，交换式①元素的位置不改变其符号.于是，只要有限次交换式①中元素的位置，使其行标$i_1i_2\cdots i_n$化为标准排列，此时列标排列为$k_1k_2\cdots k_n$，则式①变为

$$\begin{aligned}&(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}\\&=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nk_n}\\&=(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_1k_1a_2k_2\cdots a_nk_n.\end{aligned}$$

所以式①是$D_n=|a_{ij}|_n$一般项的表示式.

2. 为什么实n阶行列式($n\geqslant3$)，当$n=3$时，负项个数为奇数；当$n>3$时，负项个数为偶数？

答 因为实n阶行列式是$n!$个项的代数和，这里的负项将元素的符号计算在内.

用a_{ij}(实数)表示行列式D的第i行第j列元素，用$C_1,C_2,\cdots,C_{n!}$表示D的全部项，则

$$\begin{aligned}M&=C_1C_2\cdots C_{n!}\\&=(-1)^{n!/2}(a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn})^{(n-1)!}.\end{aligned}$$

当$n=3$时，$M=-(a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{31}a_{32}a_{33})^2\leqslant0$，从而$D$的6项$C_1,C_2,\cdots,C_6$中，负项数必为奇数.

当$n>3$时，因为$n!/2$与$(n-1)!$均为偶数，故$M=C_1C_2\cdots C_{n!}\geqslant0$，从而$D$式的$n!$个项$C_1,C_2,\cdots C_{n!}$中若有负项，必为偶数个.

方法、技巧与典型例题分析

要求熟悉行列式定义，能利用定义确定某项前的符号，能计算与证明行列式，能讨论有关行列式的一些命题.

例1 判断$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$与$-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$是否是6

阶行列式 $D_6=|a_{ij}|$ 中的项.

解 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 的逆序数为 $\tau(431265)=6$，故取正号，所以 $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$ 是 D_6 的项.

$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 的逆序数为 $\tau(341526)+\tau(234156)=8$，故取正号，所以 $-a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{25}a_{66}$ 不是 D_6 的项.

例 2 在 6 阶行列式中，$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$，$a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应带什么符号?

解 同例 1，讨论其逆序数.

因为 $\tau(234516)+\tau(312645)=4+4=8$，所以 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应带正号.

因为 $\tau(341562)+\tau(234165)=6+4=10$，所以 $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 应带正号.

例 3 写出 4 阶行列式中所有带负号且包含因子 a_{23} 的项.

解 设所求项为 $a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$，则排列 $i3jk$ 应为奇排列，且 i，j，k 只能从 1，2，4 中取.

因为 $i=1,j=2,k=4$ 时，1324 为奇排列，而对换改变奇偶性，则 3 不动，作两个对换，得 4312 和 2341，也是奇排列. 故 4 阶行列式中带负号且含 a_{23} 的项有三个，是

$$-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}, \quad -a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}, \quad -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}.$$

例 4 按定义计算行列式:

(1) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

(2) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$.

解 依行列式定义，n 阶行列式有 $n!$ 项，它的每一项是位于行列式不同行不同列的 n 个元素的乘积. 上述三个 n 阶行列式各只有一项不为零. 讨论如下：

(1) 只有 $a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n-1\,2}a_{n1}=1\cdot 2\cdot \cdots\cdot (n-1)n=n!$ 不为零，该项的列排列为 $n(n-1)\cdots 21$，$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}$，故 $D=(-1)^{n(n-1)/2}n!$；

(2) 只有 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1\,n}a_{n1}=1\cdot 2\cdot \cdots\cdot (n-1)n=n!$ 不为零，该项列排列为 $23\cdots n1$，$\tau(23\cdots n1)=n-1$，故 $D=(-1)^{n-1}n!$；

(3) 只有 $a_{1\,n-1}a_{2\,n-2}\cdots a_{n-1\,1}a_{nn}=1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n=n!$ 不为零，该项的列排列为 $(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 1\cdot n$，$\tau((n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 1\cdot n)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}$，所以，$D=(-1)^{(n-1)(n-2)/2}n!$.

例 5 用行列式定义证明

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0 .$$

证 因为行列式的一般项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}$，列标 j_3,j_4,j_5 取 1,2,3,4,5 中的不同值，即至少有一个从 3,4,5 中取. 因而 $a_{3j_3},a_{4j_4},a_{5j_5}$ 中至少有一个为零，故 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}a_{5j_5}=0$. 所以，行列式等于零.

例 6 由行列式定义计算

$$f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^3 与 x^4 的系数，并说明理由.

解 由行列式定义，$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=2x^4$，所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 2.

含 x^3 的也只有一项，$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}=-x^3$，所以 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -1.

例 7 由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}=0$，证明：奇偶排列各半.

证 由行列式定义，此行列式中任一项可表为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)},$$

而 $j_1j_2\cdots j_n$ 的排列有 $n!$ 个. 又 D 中各行元素相同，$D=0$，所以，带正、负号的项相同，从而知，奇偶排列应各占一半.

例 8 设

$$P(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix},$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是互不相同的数.

(1) 由行列式定义，说明 $P(x)$ 是一个 $n-1$ 次多项式；

(2) 由行列式性质，求 $P(x)$ 的根.

解 (1) 行列式中只有第 1 行含 x 的幂次，且最高幂次为 $n-1$，所以行列式的展开式的项中 x 最高次为 $n-1$. 又 x^{n-1} 的系数是 $(-1)^{n+1}$ 乘一个其值不为零的范德蒙行列式（因为 a_i 互异），故 $P(x)$ 为一个 $n-1$ 次多项式.

(2) 当 $x=a_i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$时，行列式有两行相同，即 $P(x)=0$. 故 $x=a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$是 $P(x)$的全部根.

例 9 求 $\sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$，这里 $\sum\limits_{j_1 j_2\cdots j_n}$ 是对所有的 n 级排列求和.

解 因为上式 $\sum$ 中共有 $n!$个 n 阶行列式. 交换每个行列式的第 1 与第 2 列，所得行列式之和仍为$\sum$ 中 $n!$个 n 阶行列式之和；而由行列式性质，交换行列式两行后行列式变号，故有

$$\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = -\sum_{j_2 j_1\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_2} & a_{1j_1} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_2} & a_{2j_1} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_2} & a_{nj_1} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$

$$= -\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}.$$

由此可得

$$\sum_{j_1 j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = 0 .$$

例 10 证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\sum\begin{vmatrix}a_{11}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t)\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t)\end{vmatrix}.$$

证 根据微分运算法则

$$\text{左端}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t)$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\Big[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1}j_1(t)a_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t)$$

$$+a_{1j_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t)+\cdots+a_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj_n}(t)\Big]$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t)$$

$$+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{2j_2}(t)\cdots a_{nj_n}(t)+\cdots$$

$$+\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}(t)a_{2j_2}(t)\cdots\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}a_{nj_n}(t)$$

$=$右端 .

例 11 设

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & 0 & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn}\end{vmatrix},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

证明： $D=D_1D_2$.

证 对 D_1 作运算 r_i+kr_j，将 D_1 化为下三角行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}p_{22}\cdots p_{kk},$$

对 D_2 作运算 c_i+kc_j，将 D_2 化为下三角行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & & \\ \vdots & \ddots & \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=q_{11}q_{22}\cdots q_{kk},$$

而对 D 的前 k 行作运算 r_i+kr_j，再对 D 的后 n 列作运算 c_i+kc_j，将 D 化为下三角行列式，则

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & 0 & \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=p_{11}p_{22}\cdots p_{kk}q_{11}q_{22}\cdots q_{nn}=D_1D_2.$$

例 12 设 n 阶行列式 D_n 的元素都是 1 和 −1，证明：D_n 是一个偶数.

证 将 D_n 的第 1 行加到第 2 行，则新的第 2 行元素只可能为 0，2，−2，即第 2 行元素有公因子 2，可以提到行列式外. 又知施行上述运算后行列式值不变，所以 D_n 是一个偶数.

例 13 设

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $b\neq 0$，证明 $A=B$.

证 由行列式定义

$$B=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}(a_{1j_1}b^{1-j_1})(a_{2j_2}b^{2-j_2})\cdots(a_{nj_n}b^{n-j_n})$$

$$=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)}$$

因为 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，所以 $j_1+j_2+\cdots+j_n=1+2+\cdots+n$. 故

$$B=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=A.$$

第三节 行列式的计算

主要内容

1. 定义 1 由 sn 个数排成的 s 行 n 列的表

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{s1}&a_{s2}&\cdots&a_{sn}\end{bmatrix}$$

称为一个 $s\times n$ **矩阵**. $s=n$ 时，称为 n **阶方阵**.

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$ 称为**矩阵 A 的行列式**，记为 $|A|$ 或 $\det A$.

2. 定义 2 数域 P 上矩阵的初等行变换是：

(1) 以 P 中一个非零的数乘矩阵的某一行；

(2) 把矩阵的某一行的 c 倍加到另一行，c 是 P 中的任意数；

(3) 互换矩阵中两行的位置.

任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成阶梯形矩阵.

对于矩阵同样可以定义初等列变换.

疑难解析

1. 矩阵与行列式有什么不同?

答 矩阵与行列式的不同不仅在形式上.行列式等于所有位于不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,而矩阵只是一个数表.它们更多的不同反映在运算性质上,通过后面的学习将完全了解它们的不同.

2. 矩阵的初等变换对行列式计算有什么意义?

答 一个任意矩阵经过一系列的初等行变换总能变成阶梯形矩阵,而一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 总能定义一个 n 阶行列式 $|\boldsymbol{A}|$(或 $\det\boldsymbol{A}$).

对矩阵作初等行变换对于行列式值的影响反映为行列式性质的(2)、(6)、(7)(第二节主要内容 2).而阶梯形方阵一定是上三角形的.因此,利用矩阵的初等变换方法化行列式为上三角形将使行列式易于计算.对高阶行列式将有助于利用计算机计算.

方法、技巧与典型例题计算

行列式计算是高等代数的基本计算之一.计算行列式的方法有很多种,如用定义计算,用性质计算,化为上、下三角形行列式计算,展开(降阶)法计算,升阶(加边)法计算,递推法计算,数学归纳法计算等等.关键是要善于观察行列式的形式特点,确定用什么方法计算,注意计算的准确性.

例 1 计算 $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$.

解 由行列式定义,本行列式只有两项不为零,即

$$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}=x^5,a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}=y^5,$$

故 $$D=x^5+(-1)^{\tau(23451)}y^5=x^5+y^5.$$

例 2 计算下面的行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1\,024 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

解 观察行列式特点，利用行列式性质与定义进行计算.

(1) $$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 1\,000 & 427 & 327 \\ 2\,000 & 543 & 443 \\ 1\,000 & 721 & 621 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 1\,000 & 100 & 327 \\ 2\,000 & 100 & 443 \\ 1\,000 & 100 & 621 \end{vmatrix}$$

$$=10^3\cdot 10^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 327 \\ 2 & 1 & 443 \\ 1 & 1 & 621 \end{vmatrix}=10^5\begin{vmatrix} 0 & 1 & 327 \\ 1 & 1 & 443 \\ 0 & 1 & 621 \end{vmatrix}$$

$$=-10^5\begin{vmatrix} 1 & 327 \\ 1 & 621 \end{vmatrix}=-29\,400\,000.$$

(2) $$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2(x+y) & y & x+y \\ 2(x+y) & x+y & x \\ 2(x+y) & x & y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}2(x+y) & y & x+y\\ 0 & x & -y\\ 0 & x-y & -x\end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)\begin{vmatrix}x & -y\\ x-y & -x\end{vmatrix}$$

$$=2(x+y)(-x^2+xy-y^2)=-2(x^3+y^3).$$

(3) $$D\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}6&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=48.$$

(4) $$D\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix}10&2&3&4\\10&3&4&1\\10&4&1&2\\10&1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\r_4-r_1}]{r_2-r_1}\begin{vmatrix}10&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&-2&-2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2-2r_1}10\begin{vmatrix}1&1&-3\\0&-4&4\\0&0&-4\end{vmatrix}=160.$$

(5) $$D\xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2}\begin{vmatrix}x&x&0&0\\1&1-x&1&1\\0&0&y&y\\1&1&1&1-y\end{vmatrix}\xlongequal[c_4-c_3]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}x&0&0&0\\1&-x&1&0\\0&0&y&0\\1&0&1&-y\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_2\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}x&0&0&0\\1&1&-x&0\\0&y&0&0\\1&1&0&-y\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}x&0&0&0\\0&y&0&0\\1&1&-x&0\\1&1&0&-y\end{vmatrix}=x^2y^2.$$

(6) $$D\xlongequal[\substack{c_3-c_2\\c_2-c_1}]{c_4-c_3}\begin{vmatrix}a^2&2a+1&2a+3&2a+5\\b^2&2b+1&2b+3&2b+5\\c^2&2c+1&2c+3&2c+5\\d^2&2d+1&2d+3&2d+5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3-c_2]{c_4-c_3}\begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 2 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 2 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 2 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0\ .$$

例 3 证明 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

证 左边 $\xlongequal{c_1+c_2+c_3}2\begin{vmatrix} a+b+c & c+a & a+b \\ a_1+b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[c_3-c_1]{c_2-c_1}2\begin{vmatrix} a+b+c & -b & -c \\ a_1+b_1+c_1 & -b_1 & -c_1 \\ a_2+b_2+c_2 & -b_2 & -c_2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_2\times -1 \\ c_3\times -1}]{c_1+c_2+c_3}2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

例 4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}.$$

解 因为 $D^2=D\cdot D=D\cdot D'$

$$=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & c & b & a \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{vmatrix}$$

$=(a^2+b^2+c^2+d^2)^4$,

所以 $$D=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

(行列式乘法见第 6 节主要内容)

例 5 计算 $D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}$.

解 当 $x=\pm1$ 时,$2-x^2=1$,D_4 的第 1、第 2 行元素相同,$D_4=0$,所以 D_4 含因子$(x-1)(x+1)$.

当 $x=\pm2$ 时,$9-x^2=5$,D_4 的第 3、第 4 行元素相同,$D_4=0$,所以 D_4 含因子$(x-2)(x+2)$.

因为 D_4 是 x 的四次多项式,所以

$$D_4=k(x-1)(x-2)(x+1)(x+2).$$

由 $x=0$ 时 $D_4=-12\Longrightarrow k=-3$,故

$$D_4=-3(x-1)(x-2)(x+1)(x+2).$$

例 6 讨论 D_n 的值

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n\end{vmatrix}.$$

解 当 $n=1$ 时,$D_1=a_1+b_1$;

当 $n=2$ 时,$D_2=(a_1-a_2)(b_2-b_1)$;

当 $n\geqslant3$ 时,

$$D_n \xlongequal{r_i-r_1} \begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n\\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \cdots & a_2-a_1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & & a_n-a_1\end{vmatrix} \quad (i=2,3,\cdots,n)$$

$$\xlongequal{c_i-c_1} \begin{vmatrix}a_1+b_1 & b_2-b_1 & \cdots & b_n-b_1\\ a_2-a_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n-a_1 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}=0.$$

故知当 n 不同时，D_n 不相同，有

$$D_n=\begin{cases} a_1+b_1, & n=1, \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2, \\ 0, & n\geqslant 3. \end{cases}$$

例 7 设 n 阶行列式 $D_n=|a_{ij}|$，把 D 上下翻转、或逆时针旋转 90°、或依副对角线翻转得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{11} \end{vmatrix},$$

证明：$D_1=D_2=(-1)^{n(n-1)/2}D, D_3=D$.

证 (1) 将 D_1 的最后一行与上面一行逐一对换，经 $n-1$ 次对换可换到第 1 行；这时 D_1 的最后第 2 行位于最后一行，进行 $n-2$次对换可换到第 2 行；如此继续，共进行

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=n(n-1)/2$$

次对换可化 D_1 为 D. 故 $D_1=(-1)^{n(n-1)/2}D$.

(2) 用题(1)的方法进行 $n(n-1)/2$ 次行对换，得

$$D_2=(-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)/2}D'$$

$$=(-1)^{n(n-1)/2}D.$$

(3) 对 D_3 用题(1)的方法进行 $n(n-1)/2$ 次列对换，得

$$D_3=(-1)^{n(n-1)/2}\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11} & \cdots & a_{n1} \end{vmatrix}=(-1)^{n(n-1)/2}D_2.$$

再对 D_2 用题(1)的方法进行 $n(n-1)/2$ 次行对换，得

$$D_3=(-1)^{n(n-1)/2}\cdot(-1)^{n(n-1)/2}D=D.$$

很多计算方法要用到行列式展开定理、范德蒙行列式，因此，将在后面几节中继续讨论行列式的计算.

第四节　行列式按一行(列)展开

主 要 内 容

1. 在 n 阶行列式中划去元素 a_{ij} 所在行与列，余下的元素位置不变，所得到的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}.

$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

2. 定理　设

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则下列公式成立：

$$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases} d, & k=i, \\ 0, & k\neq i; \end{cases}$$

$$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases} d, & l=j, \\ 0, & l\neq j. \end{cases}$$

3. 行列式

$$d=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

称为范德蒙(Vandermonde)行列式.

$$d=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j),$$

即对任意 n $(n\geqslant 2)$，范德蒙行列式等于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数的所有可能的差 a_i-a_j $(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 的乘积.

范德蒙行列式等于零$\Longleftrightarrow a_1,a_2,\cdots,a_n$中至少有两个相等.

疑 难 解 析

怎样应用行列式按行(列)展开定理?

答 行列式按行(列)展开定理可以将一个 n 阶行列式的计算归结为 $n-1$ 阶行列式的计算. 但是,当行列式某行(列)的元素都不为零时,按该行(列)展开行列式并不能减少计算量,仅当行列式某行(列)有较多个零时,才可以简化计算. 因此,在应用行列式按行(列)展开定理时,一是要选择含零较多的行(列)展开,二是利用行列式性质将某行(列)元素化为只含一个非零元素后展开. 将行列式按行(列)展开在用归纳法、递推法、降阶法等方法计算行列式时应用更为广泛.

方法、技巧与典型例题分析

应用好行列式按行(列)展开定理的关键是选择某行(列),为此常常需要先利用行列式性质使该行(列)元素尽可能多地变为零;在证明有关命题时,这种选择尤为重要,一定要使展开能凸现命题.

例 1 设

$$D_4=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & f \\ b_1 & b_2 & b_3 & f \\ c_1 & c_2 & c_3 & f \\ d_1 & d_2 & d_3 & f \end{vmatrix},\quad D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix},$$

求:(1) D_4 的第 1 列元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}$;

(2) D_n 的第 1 行元素的代数余子式之和 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

解 (1) 当 $f=0$ 时,$A_{i1}=0\ (i=1,2,3,4)$,故 $A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0$.

当 $f\neq 0$ 时，因为 $\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0, i\neq j$，即

$$fA_{11}+fA_{21}+fA_{31}+fA_{41}=0 \Longrightarrow f(A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41})=0,$$

故
$$A_{11}+A_{21}+A_{31}+A_{41}=0.$$

（2）显然，有以下等式

$$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{c_1-c_j/j}\begin{vmatrix} 1-\sum_{j=2}^{n}1/j & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & n \end{vmatrix}$$

$$=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$

例 2 求出下列行列式的代数余子式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

解

(1) $A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-6$, $A_{12}=0$, $A_{13}=0$, $A_{14}=0$;

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-12,\ A_{22}=6,\ A_{23}=0,\ A_{24}=0;$$

类似可得 $A_{31}=15, A_{32}=-6, A_{33}=-3, A_{34}=0;$

$$A_{41}=7,\quad A_{42}=0,\quad A_{43}=1,\quad A_{44}=2.$$

(2) $A_{11}=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 4\end{vmatrix}=7, A_{12}=-12, A_{13}=3;$

$$A_{21}=6,\quad A_{22}=4,\quad A_{23}=-1;$$

$$A_{31}=-5,\quad A_{32}=-5,\quad A_{33}=5.$$

例 3 计算下面的行列式：

(1) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1 & -3\\1 & 2 & 2 & 5\\4 & 3 & 2 & 1\end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix}1 & 1/2 & 1 & 1\\-1/3 & 1 & 2 & 1\\1/3 & 1 & -1 & 1/2\\-1 & 1 & 0 & 1/2\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & -1 & 4\\2 & 0 & 1 & 2 & 1\\-1 & 3 & 5 & 1 & 2\\3 & 3 & 1 & 2 & 1\\2 & 1 & 0 & 3 & 5\end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix}1 & 1/2 & 0 & 1 & -1\\2 & 0 & -1 & 1 & 2\\3 & 2 & 1 & 1/2 & 0\\1 & -1 & 0 & 1 & 2\\2 & 1 & 3 & 0 & 1/2\end{vmatrix}$.

解 先利用行列式的性质使某行(列)元素变得只有一个不为零,再按此行(列)展开,可反复如此进行.

(1) $D\overset{c_2-c_3}{=\!=\!=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\2 & 0 & 1 & -3\\1 & 0 & 2 & 5\\4 & 1 & 2 & 1\end{vmatrix}\overset{\text{按第 2 列展开}}{=\!=\!=\!=}(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 1 & -3\\1 & 2 & 5\end{vmatrix}$

$$\underset{c_3-c_1}{\overset{c_2-c_1}{=\!=\!=}}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\2 & -1 & -5\\1 & 1 & 4\end{vmatrix}=1\,.$$

(2) $D\underset{\substack{c_2\times 2\\ c_4\times 2}}{\overset{c_1\times 3}{=\!=\!=}}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 2\\-1 & 2 & 2 & 2\\1 & 2 & -1 & 1\\-3 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_3+r_1]{r_2-2r_1}\frac{1}{12}\begin{vmatrix}3&1&1&2\\-7&0&0&-2\\4&3&0&3\\0&3&0&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 3 列展开}}\frac{1}{12}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-7&0&-2\\4&3&3\\-3&2&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2-3r_3]{r_1+2r_3}\frac{1}{12}\begin{vmatrix}-13&4&0\\13&-3&0\\-3&2&1\end{vmatrix}=-\frac{13}{12}.$$

(3) $$D\xlongequal[\substack{c_4+c_2\\c_5-4c_2}]{c_3-2c_2}\begin{vmatrix}0&1&0&0&0\\2&0&1&2&1\\-1&3&-1&4&-10\\3&3&-5&5&-11\\2&1&-2&4&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 行展开}}-\begin{vmatrix}2&1&2&1\\-1&-1&4&-10\\3&-5&5&-11\\2&-2&4&1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3-c_1\\c_1-2c_2}]{c_4-c_2}\begin{vmatrix}0&1&0&0\\1&-1&5&-9\\13&-5&2&-6\\6&-2&2&3\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第 1 行展开}}\begin{vmatrix}1&5&-9\\13&2&-6\\6&2&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_3+9c_1]{c_2-5c_1}\begin{vmatrix}1&0&0\\13&-63&111\\6&-28&57\end{vmatrix}=-483.$$

(4) $D \xlongequal[\substack{c_3\times 2\\ c_4\times 2}]{c_2\times 2} \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[r_5+3r_2]{r_3+r_2} \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 0 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 3 列展开}} \frac{1}{8}(-1)^{2+3}(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 6 & 13 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_2-c_1\\ c_3-2c_1}]{c_4+c_3} \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & 7 \\ 1 & -3 & 0 & 6 \\ 8 & -6 & -10 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 1 行展开}} \frac{1}{8}\begin{vmatrix} -1 & -7 & 7 \\ -3 & 0 & 6 \\ -6 & -10 & 19 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_3+2c_1} \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & -7 & 5 \\ -3 & 0 & 0 \\ -6 & -10 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第 2 行展开}} \frac{3}{8}\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -10 & 7 \end{vmatrix} = \frac{3}{8}.$$

例 4 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

解 (1) $\xlongequal{\text{按第 1 列展开}} x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$

$$+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}$$

$$=x\cdot x^{n-1}+(-1)^{n+1}y\cdot y^{n-1}=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$

(2) 见第三节例 6.

$$D=\begin{cases} a_1-b_1, & n=1, \\ (a_1-a_2)(b_1-b_2), & n=2, \\ 0, & n\geqslant 3. \end{cases}$$

(3) $$D\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}x_i-m & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-m\right)m^{n-1}.$$

(4) $$D\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第1行展开}}(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$=-2(n-2)!$$

(5) $$D\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第1列展开}}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}(n-1)!=(-1)^{n+1}(n+1)!/2.$$

行列式一题多解是很普遍的，为了节省篇幅，只选了一种解法，读者可自行尝试用其它方法进行计算.

例 5 证明：

(1) $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right);$$

(2) $$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0;$$

(3) $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta};$$

(4) $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha;$$

(5) $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

证

(1) $$D \xlongequal{c_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\cdot c_i} \begin{vmatrix} a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

(2)

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i+r_{i-1}/x} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1+a_0/x \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & a_2+a_1/x+a_0/x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2}+a_{n-3}/x+\cdots+a_0/x^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x+a_{n-1}+a_{n-2}/x+\cdots+a_0/x^{n-1} \end{vmatrix}$$

$=x^{n-1}(x+a_{n-1}+a_{n-2}/x+\cdots+a_0/x^{n-1})$

$=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0.$

(3) 对 n 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,直接计算可得

$$D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}.$$

设对 $n-1$ 结论成立,

$$D_{n-1}=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}=\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-2}+\beta^{n-1}.$$

对 n 情形,将 D_n 第 1 列分成两项之和,则

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta\end{vmatrix}.$$

对第一个行列式进行运算 $c_{i+1}-yc_i$,得

$$D_n=\begin{vmatrix}\alpha & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \alpha & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha\end{vmatrix}+\beta D_{n-1}=\alpha^n+\beta D_{n-1}$$

$$=\alpha^n+\alpha^{n-1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

(4) 用数学归纳法.

当 $n=2$ 时,直接计算得 $D_2=2\cos^2\alpha-1=\cos2\alpha$.

设当 $n-1$ 时结论成立，

$$D_{n-1}=\cos(n-1)\alpha.$$

当 n 时，按第 n 行展开，得

$$\begin{aligned}
D_n &= 2\cos\alpha D_{n-1}-D_{n-2} \\
&= 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-2)\alpha \\
&= 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos[(n-1)\alpha-\alpha] \\
&= 2\cos\alpha\cos(n-1)\alpha-\cos(n-1)\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha\sin\alpha \\
&= \cos(n-1)\alpha\cos\alpha-\sin(n-1)\alpha\sin\alpha \\
&= \cos n\alpha.
\end{aligned}$$

(5) 将 D_n 的每个元素看作两项和，则

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & a_2+1 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_{n1}+1 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n \end{vmatrix}
+\begin{vmatrix} a_1+1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a_2+1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_{n-1}+1 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

对第二个行列式进行运算 c_i-c_n，$(i=1,2,\cdots,n-1)$，则

$$\begin{aligned}
D_n &= a_nD_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-1} \\
&= a_n(a_{n-1}D_{n-2}+a_1a_2\cdots a_{n-2})+a_1a_2\cdots a_{n-1} \\
&= \cdots \\
&= a_na_{n-1}\cdots a_2D_1+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1} \\
&= a_na_{n-1}\cdots a_2(a_1+1)+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1} \\
&= a_na_{n-1}\cdots a_1\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).
\end{aligned}$$

例 6　证明：

(1) $$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij};$$

(2) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

证 用 D 表示右端第一个行列式，A_{ij} 为 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式；以 Δ 记左端行列式，将 Δ 中第 1 列看作两项之和，有

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & a_{n2}+x & & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} 1 & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$

对后一行列式施行运算 c_j-c_1x $(j=2,3,\cdots,n)$，得

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}+x\sum_{i=1}^{n}A_{i1},$$

再将前一行列式第 2 列分成两项之和，可得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i2} + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1}.$$

如此反复进行，可得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n} A_{in} + \cdots + x\sum_{i=1}^{n} A_{i1}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}.$$

(2) 在题(1)中令 $x=1$，即得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12}+1 & \cdots & a_{1n}+1 \\ a_{21}+1 & a_{22}+1 & \cdots & a_{2n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+1 & a_{n2}+1 & \cdots & a_{nn}+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

在右端两行列式中进行 $c_i - c_{i+1}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$运算，得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)}-a_{1n} & a_{1n}+1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)}-a_{2n} & a_{2n}+1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)}-a_{nn} & a_{nn}+1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)}-a_{1n} & a_{1n} \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)}-a_{2n} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)}-a_{nn} & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将右端第一行列式最后一列分成两项之和，则

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1(n-1)}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2(n-1)}-a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n(n-1)}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}$$

例 7 计算下面的 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$；

(4) $\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

解 n 阶行列式的计算可以利用行列式性质与按行(列)展开定理.对于一些特殊形式的行列式,还可利用范德蒙行列式的结果.

$$(1)\ D \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_{i-1}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 1 & & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1-n & 1 & & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_{i-1}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & \cdots & -n & n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1-n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(-1)(-n)^{n-2}$$

$$=(-1)^{n(n-1)}\frac{n^n+n^{n-1}}{2}.$$

(2) $$D\xlongequal[i=2,3,\cdots,n-1]{r_i-r_n}\begin{vmatrix}\lambda & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & \alpha\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & \beta-\alpha\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & \beta-\alpha\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_n+c_1+\cdots+c_{n-1}}\begin{vmatrix}\lambda & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & (n-1)\alpha\\ 0 & \alpha-\beta & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ b & \beta & \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}\lambda\begin{vmatrix}\alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ \beta & \cdots & \beta & \alpha+(n-2)\beta\end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix}\alpha & \cdots & \alpha & (n-1)\alpha\\ \alpha-\beta & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & \alpha-\beta & 0\end{vmatrix}$$

$$=\lambda(\alpha-\beta)^{n-2}[\alpha+(n-2)\beta]$$

$$+(-1)^{n+1}b(-1)^n(n-1)\alpha(\alpha-\beta)^{n-2}$$

$$=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+(n-2)\lambda\beta-(n-1)\alpha b].$$

(3) $$D_n\xlongequal{r_1-r_2}\begin{vmatrix}x+a & a-x & 0 & \cdots & 0\\ -a & x & a & \cdots & a\\ -a & -a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a & -a & -a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按 } c_1 \text{ 展开}}(x+a)D_{n-1}+\begin{vmatrix} -a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{c_i-c_{i-1}}(x+a)D_{n-1}-a(x-a)^{n-1}. \qquad ①$$

因为 $D_n=D_n'$，故将 a 换成 $-a$ 后行列式值不变，即有

$$D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x+a)^{n-1}. \qquad ②$$

联立式①、②解得

$$D_n=\frac{(x+a)^n+(x-a)^n}{2}.$$

(4) 当 $y\neq z$ 时，利用上题解法，得

$$\begin{cases} D_n=(x-z)D_{n-1}+z(x-y)^{n-1}, \\ D_n=(x-y)D_{n-1}+y(x-z)^{n-1}. \end{cases}$$

解得 $$D_n=\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}.$$

当 $y=z$ 时，

$$D_n\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 1 & x & y & \cdots & y \\ 1 & x & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y & y & \cdots & x \end{vmatrix}[x+(n-1)y]$$

$$\xlongequal[i=2,3,\cdots,n]{r_i-r_1}\begin{vmatrix} 1 & y & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}[x+(n-1)y]$$

$$=(x-y)^{n-1}[x+(n-1)y].$$

(5) 用加边法. 考虑 $n+1$ 阶范德蒙行列式

$$g(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} & x^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x^n \end{vmatrix}=\sum_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

所求行列式即 $g(x)$ 中元素 x^{n-1} 的余子式 $M_{n\,n+1}$，

$$D_n=M_{n\,n+1}=-A_{n\,n+1}.$$

由 $g(x)$ 的表达式知，x^{n-1} 的系数为

$$A_{n\,n+1}=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j),$$

故
$$D_n=\sum_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

例 8 计算 $f(x+1)-f(x)$，其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & c_n^2 & c_n^3 & \cdots & c_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & c_{n+1}^2 & c_{n+1}^3 & \cdots & c_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

解 $f(x+1)$ 与 $f(x)$ 仅行列式第 $n+1$ 列不同，故

$f(x+1)-f(x)$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2x+1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 3x^2+3x+1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & c_n^2 & c_n^3 & \cdots & c_n^{n-1} & nx^{n-1}+\cdots+1 \\ 1 & n+1 & c_{n+1}^2 & c_{n+1}^3 & \cdots & c_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n+\cdots+1 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=1,2,\cdots,n]{c_{n+1}-x^{i-1}c_i}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & n & c_n^2 & c_n^3 & \cdots & c_n^{n-1} & 0 \\ 1 & n+1 & c_{n+1}^2 & c_{n+1}^3 & \cdots & c_{n+1}^{n-1} & (n+1)x^n \end{vmatrix}$$

$=(n+1)!x^n$.

例 9 证明：n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=n+1\ .$$

证 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$D_1=2$，结论成立.

设 $n\leqslant k$ 时，结论成立. 则当 $n=k+1$ 时

$$D_{k+1}\xlongequal{\text{按第 1 行展开}}2D_k+\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=2D_k-D_{k-1}=2(k+1)-k=(k+1)+1.$$

命题得证.

应用数学归纳法可以做证明题，也可以做计算题. 例 9 所用称为第二数学归纳法，它与第一数学归纳法的区别在于归纳法的第二步：第一数学归纳法是设 $n=k$，第二数学归纳法是设 $n\leqslant k$. 例 9 涉及递推过程，$n\leqslant k$，故用第二数学归纳法.

第五节　克拉默(Cramer)法则

主要内容

1. 克拉默法则　若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad ①$$

的系数矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的行列式 $D=|A|\neq 0$，则线性方程组①有解，且解是唯一的，可以表为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n=\frac{D_n}{D},$$

式中 D_j 是将 D 中第 j 列换作方程组①中常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得的行列式($j=1,2,\cdots,n$).

2. 定理　若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \qquad ②$$

的系数矩阵的行列式 $|A|\neq 0$，则它只有零解. 若方程组②有非零解，则必有 $|A|=0$.

疑难解析

克拉默法则有什么意义？

解　克拉默法在线性方程组理论上有重大的价值，它明确给

出了线性方程组①的解与方程组系数之间的关系，指出了齐次线性方程组②在$|\boldsymbol{A}|\neq 0$时只有零解.

克拉默法则只在方程组方程个数与未知量个数相同时适用.由于解一个n个未知量n个方程的方程组时，要计算$n+1$个n阶行列式，所以在使用上是不够方便的.

方法、技巧与典型例题分析

例1 用克拉默法则解下列线性方程组：

(1) $$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3+2x_4=6,\\3x_1-3x_2+3x_3+2x_4=5,\\3x_1-x_2-x_3+2x_4=3,\\3x_1-x_2+3x_3-x_4=4;\end{cases}$$

(2) $$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6,\\2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8,\\3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4,\\2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8;\end{cases}$$

(3) $$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3+4x_4-x_5=-1,\\2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5=8,\\3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3,\\4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5=-2,\\x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5=-3;\end{cases}$$

(4) $$\begin{cases}5x_1+6x_2=1,\\x_1+5x_2+6x_3=0,\\x_2+5x_3+6x_4=0,\\x_3+5x_4+6x_5=0,\\x_4+5x_5=1.\end{cases}$$

解 计算行列式D与D_i，注意计算的正确性.

(1) $D=-70\neq 0$，$D_1=-70$，$D_2=-70$，$D_3=-70$，$D_4=$

-70. 故方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1,\quad x_4=\frac{D_4}{D}=1.$$

(2) $D=324, D_1=324, D_2=648, D_3=-324, D_4=-648$. 故方程组有唯一解：

$$x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=-1,\quad x_4=-2.$$

(3) $D=24, D_1=96, D_2=-336, D_3=-96, D_4=168, D_5=312$, 故方程组有唯一解：

$$x_1=4,\quad x_2=-14,\quad x_3=-4,\quad x_4=7,\quad x_5=13.$$

(4) $D=665, D_1=1\,507, D_2=-1\,145, D_3=703, D_4=-395, D_5=212$, 故方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{1\,507}{665},\ x_2=-\frac{229}{133},\ x_3=\frac{37}{35},\ x_4=-\frac{79}{133},\ x_5=\frac{212}{665}.$$

例 2 求使齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解的 λ 值.

解 即求得 $D=0$ 的 λ 值. 因为

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda & -2 & 4\\ 2 & 3-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}\xrightarrow[c_3-(1-\lambda)c_1]{c_2-c_1}\begin{vmatrix}1-\lambda & \lambda-3 & 4-(1-\lambda)^2\\ 2 & 1-\lambda & 2\lambda-1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}\lambda-3 & 4-(1-\lambda)^2\\ 1-\lambda & 2\lambda-1\end{vmatrix}=-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3),$$

所以，$D=0$ 时 $\lambda=0,2,3$. 即 $\lambda=0,2,3$ 时，方程组有非零解.

例 3 证明平面上三条不同直线 $ax+by+c=0, bx+cy+a=0, cx+ay+b=0$ 相交于一点的充分必要条件是 $a+b+c=0$.

证 必要性 设三条直线交于一点 (x_0, y_0)，故 $x=x_0, y=y_0, z=1$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} ax+by+c=0, \\ bx+cy+a=0, \\ cx+ay+b=0 \end{cases} \quad ①$$

的一组非零解，则 $D=0$，即

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)+(b-c)^2+(c-a)^2]=0.$$

因为 a,b,c 不相同，所以必有 $a+b+c=0$.

充分性 若 $a+b+c=0$，则由方程组①得

$$\begin{cases} ax+by=-c, \\ bx+cy=-a, \\ \quad\quad 0=\ 0. \end{cases} \quad ②$$

证明方程组②有唯一解. 用反证法，设方程组②的解不唯一，则必有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac-b^2=0, \quad ac=b^2 \geqslant 0.$$

因为

$$b=-(a+c) \Rightarrow ac=[-(a+c)]^2=a^2+2ac+c^2$$
$$\Rightarrow ac=-(a^2+c^2) \leqslant 0 \Rightarrow ac=0.$$

不妨设 $a=0$，则由 $b^2=ac \Rightarrow b=0$；再由 $a+b+c=0 \Rightarrow c=0$，这与三条不同直线假设矛盾. 故 $ac-b^2 \neq 0$，方程组②有唯一解，即方程组①有唯一解，亦即三条不同直线交于一点.

例 4 求一个二次多项式 $f(x)$，使 $f(1)=0$，$f(2)=3$，$f(-3)=28$.

解 设所求二次多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c$，由题设可得一线性方程组

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=0, \\ f(2)=4a+2b+c=3, \\ f(-3)=9a-3b+c=28. \end{cases}$$

计算得 $D=-20, D_1=-40, D_2=60, D_3=-20$，解得 $a=2, b=-3, c=1$. 故所求多项式为

$$f(x)=2x^2-3x+1.$$

例 5 设 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 2+x \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & x+2 & 4-x \end{vmatrix}$，证明：$f'(x)=0$ 有小于 1 的正根.

证 因为 $f(x)$ 是一个多项式，所以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导. 又

$$f(0)=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0, \quad f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0.$$

故 $f(x)$ 满足罗尔定理条件，必有 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$，即 $f'(x)$ 有小于 1 的正根.

例 6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是数域 P 中互不相同的数，$b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是数域 P 中任一组给定的数，用克拉默法则证明：存在唯一的数域 P 上的多项式 $f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$，使

$$f(a_i)=b_i, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

证 考虑线性方程组

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2+\cdots+a_1^{n-1}x_n=b_1, \\ x_1+a_2x_2+\cdots+a_2^{n-1}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \\ x_1+a_nx_2+\cdots+a_n^{n-1}x_n=b_n, \end{cases}$$

其系数行列式为一范德蒙行列式. 由于 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 互不相同，因此系数行列式不为零，方程组有唯一解. 不妨设其解为

$$x_1=c_{n-1}, \quad x_2=c_{n-2}, \quad \cdots, \quad x_n=c_0.$$

于是，多项式

$$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$$

是次数小于 n 的多项式，且满足 $f(a_i)=b_i$，$i=1,2,\cdots,n$. 又由方

程组解的唯一性知，这个多项式也是唯一的.

例 7 设水银密度 h 与温度 t 的关系为

$$h=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3,$$

由实验测得数据如表 2-1 所示。

表 2-1 水银密度与温度的实验数据

t/℃	0	10	20	30
h/(g/cm³)	13.60	13.57	13.55	13.52

求 $t=15$℃，40℃时水银密度(准确到小数两位).

解 代入数据，得方程组

$$\begin{cases}a_0 &=13.60,\\ a_0+10a_1+100a_2+1\,000a_3&=13.57,\\ a_0+20a_1+400a_2+8\,000a_3&=13.55,\\ a_0+30a_1+900a_2+27\,000a_3&=13.52.\end{cases} \quad ①$$

将 $a_0=13.60$ 代入方程组①中其它方程，得

$$\begin{cases}a_1+10a_2+100a_3=-0.003,\\ 2a_1+40a_2+800a_3=-0.005,\\ 3a_1+90a_2+2\,700a_3=-0.008.\end{cases} \quad ②$$

因为方程组②的系数行列式 $d=12\,000$；$d_1=-50, d_2=1.8, d_3=-0.04$，解得

$a_0=13.60$，$a_1=-0.004\,2$，$a_2=0.000\,15$，$a_3=-0.000\,003\,3$，

故所求关系式为

$$h(t)=13.60-0.004\,2t+0.000\,15t^2-0.000\,003\,3t^3,$$

从而 $h(15)=13.56$， $h(40)=13.46$.

例 8 图 2.1 表示一电路网络，每条线上标出的数字是电阻，点 E 接地，由点 X、Y、U、Z 通入电流，强度均为 100A，求这四点的电位(用基尔霍夫定律).

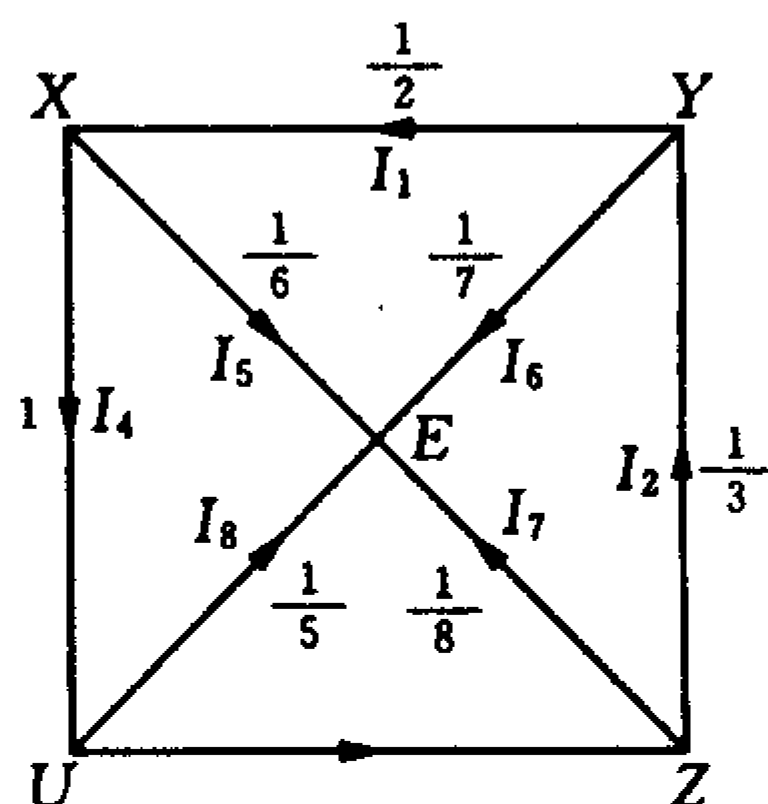


图 2.1

解 依基尔霍夫定律，建立方程组

$$\begin{cases} -I_1 + I_4 + I_5 = 100, \\ I_1 - I_2 + I_6 = 100, \\ I_2 - I_3 + I_7 = 100, \\ I_3 - I_4 + I_8 = 100. \end{cases} \quad ①$$

设点 X、Y、U、Z 电位分别为 X_0、Y_0、U_0、Z_0，则由 $I=U/R$ 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= 2Y_0 - 2X_0, & I_5 &= 6X_0, \\ I_2 &= 3Z_0 - 3Y_0, & I_6 &= 7Y_0, \\ I_3 &= 4U_0 - 4Z_0, & I_7 &= 8Z_0, \\ I_4 &= X_0 - U_0, & I_8 &= 5U_0. \end{aligned}$$

代人式①得方程组

$$\begin{cases} 9X_0 - 2Y_0 - U_0 = 100, \\ -2X_0 + 12Y_0 - 3Z_0 = 100, \\ -3Y_0 + 15Z_0 - 4U_0 = 100, \\ -X_0 - 4Z_0 + 10U_0 = 100, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} X_0 = 210\,100/129\,07, \\ Y_0 = 188\,400/129\,07, \\ Z_0 = 183\,300/129\,07, \\ U_0 = 223\,400/129\,07. \end{cases}$$

第六节 拉普拉斯(Laplace)定理 行列式的乘法规则

主要内容

1. 定义 在一个行列式中任意选定 k 行 k 列($k \leqslant n$)，位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按照原来的次序组成的一个 k 阶行列式 M，M 称为行列式的一个 **k 阶子式**. 在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M'，M' 称为 k 阶子式 M 的**余子式**.

若 k 阶子式 M 在 D 中的所在行、列分别为 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 和 $j_1, j_2, \cdots, j_k$，则 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)} M'$ 称为 M **的代数余子式**.

2. 引理 行列式 D 的任一个子式 M 与它的代数余子式 A 的乘积中的每一项都是行列式 D 的展开式中的一项，且符号也一致.

拉普拉斯定理 设在行列式中任意取定 k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$行，由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与它的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

3. 定理 两个 n 阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个 n 阶行列式

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 c_{ij} 是 D_1 中 i 行元素与 D_2 中 j 列对应元素乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}.$$

疑 难 解 析

怎样使用拉普拉斯定理?

答 拉普拉斯定理的应用主要在理论上，这将在后面逐渐学到. 而实际用来计算行列式，还是不够方便.

一般选择含零较多的 k 行(也可以利用行列式性质将某些行化为尽可能多的含零元素)来进行，找出其中不等于零的所有 k 级子式，与其对应的代数余子式作乘积并求和. 注意不要遗漏与重复.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & 1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & x_1 & x_2 & x_3 & c_2 \\ a_3 & b_3 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & c_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & 0 & 0 & 0 & x_3^2 \end{vmatrix}$;

(2) $\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & ⋰ & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & c_1 & d_1 & & \\ & ⋰ & & & \ddots & \\ c_n & & & & & d_n \end{vmatrix}$.

解 一般选 k 为 2 或 3,这样 k 阶子式容易算出.

(1) 将行列式按第 1、2、6 行展开,只有一个 3 阶子式不为零,故

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+2+6+1+2+6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

$$=[(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)]^2.$$

(2) 将行列式按最上面一行与最下面一行(即第 1,$2n$ 行)展开,只有一个 2 阶子式不为零,故

$$D_{2n}=(a_nd_n-b_nc_n)(-1)^{1+2n+1+2n}D_{2n-1}=(a_nd_n-b_nc_n)D_{2n-1}$$

再按 D_{2n-2} 的第 1 行与第$(2n-2)$行展开,…

如此重复进行,最后得

$$D_{2n}=\prod_{i=2}^{n}(a_id_i-b_ic_i)D_2=\prod_{i=1}^{n}(a_id_i-b_ic_i).$$

也可以将行列式按中间两行(即第 $n,n+1$ 行)展开,再反复进行,得到相同结果.

例 2 设 $D_1=|a_{ij}|$ 与 $D_1=|b_{ij}|$ 是 n 阶行列式,则

$$D_1D_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}, \qquad ①$$

式中 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$. 证明：

(1) $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$； (2) $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_{jk}$； (3) $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_{kj}$.

证 题设所给 c_{ij} 是“行乘列”形式.

(1) 是“行乘行”形式. 依行列式性质，$D_2=D_2'$，故

$$D_1D_2=D_1D_2'=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

所以，$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}$.

(2) 是“列乘行”形式. 因为 $D_1=D_1'$，$D_2=D_2'$，故 $D_1D_2=D_1'D_2'$. 所以，$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_{jk}$.

(3) 是“列乘列”形式. 因为 $D_1=D_1'$，故 $D_1D_2=D_1'D_2$. 所以，$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ki}b_{kj}$.

例 3 证明：

$$\begin{vmatrix} \cos2\alpha & \cos(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\delta) \\ \cos(\beta+\alpha) & \cos2\beta & \cos(\beta+\gamma) & \cos(\beta+\delta) \\ \cos(\gamma+\alpha) & \cos(\gamma+\beta) & \cos2\gamma & \cos(\gamma+\delta) \\ \cos(\delta+\alpha) & \cos(\delta+\beta) & \cos(\delta+\gamma) & \cos2\delta \end{vmatrix}=0.$$

证 由三角函数的和、差公式知：

$$D=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0\\ \cos\beta & \sin\beta & 0 & 0\\ \cos\gamma & \sin\gamma & 0 & 0\\ \cos\delta & \sin\delta & 0 & 0\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & \cos\delta\\ -\sin\alpha & -\sin\beta & -\sin\gamma & -\sin\delta\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$=0.$

例 4 计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \cdots & x_n+1\\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \cdots & x_n^2+x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

解 由行列式乘法规则

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_j-x_i).$$

第三章　线性方程组

本章讨论线性方程组的解与向量空间的有关概念.向量空间的理论与方法不仅是高等代数的基本数学概念,而且对其它自然科学与工程技术也是十分重要的.

第一节　消　元　法

主要内容

1. 下列变换称为线性方程组的**初等变换**:

(1) 用一个非零的数乘某一方程;

(2) 把一个方程的倍数加到另一方程上;

(3) 互换两个方程的位置.

初等变换总能把方程组变成同解的方程组.

2. **定理**　在齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

中,若 $s<n$,则方程必有非零解.

3. 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

称为非齐次线性方程组的增广矩阵.

疑难解析

消元法解线性方程组的理论依据是什么？它是怎样进行的？

答 消元法解线性方程组的理论依据是，线性方程组经初等变换后得到的方程组与原方程组同解.

消元法解线性方程组的步骤是：

(1) 将方程组中某个方程的某个未知量的系数用初等变换法变为零. 反复进行，得到一个阶梯形方程组.

(2) 若在阶梯形方程组中最后一个等式是零等于一个非零的数，则可判定方程组无解，否则方程组有解.

(3) 在有解的情形，若阶梯形方程组中方程的个数 r 等于未知量个数，则方程组有唯一解；若 r 小于未知量个数，则方程组有无穷多解.

消元法解线性方程组可以在线性方程组的增广矩阵上进行，即对增广矩阵施行相应的初等变换化为阶梯形矩阵，可以判别方程组是否有解，并用相应阶梯形方程组求出解.

方法、技巧与典型例题分析

一般，用消元法解线性方程组可以选择在增广矩阵上进行，写起来比较简便. 但是要标记出所进行的初等变换，以便检查与阅读.

例 1 用消元法解线性方程组：

$$(1)\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4 \qquad =1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1; \end{cases}$$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad -3x_4+2x_5=1, \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7, \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ \qquad x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2 \qquad +x_4=1, \\ \quad -7x_2+3x_3+x_4=-3; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$

解 对增广矩阵 $\overline{A}$ 施行初等行变换.

$$(1)\ \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 1 & \vdots & -1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,4,5]{r_i-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & -5 & -4 & 3 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -1 & \vdots & 2 \\ 0 & -1 & -4 & 3 & 1 & \vdots & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4+r_2 \\ r_5-r_2}]{r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -4 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & \vdots & -2 \\ 0 & -5 & -7 & 5 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 7 & -7 & 7 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3-5r_5\\ r_4-7r_5}]{r_1+3r_5}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\times\left(-\frac{1}{2}\right)}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2+3r_3\\ r_5+r_3}]{r_1-2r_3}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\times\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_5-r_2]{r_1+r_2}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/2 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4\leftrightarrow r_2]{r_4\leftrightarrow r_5}\left[\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1/2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

对应同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{x_5}{2},\\ x_2=-\dfrac{x_5}{2}-1,\\ x_3=0,\\ x_4=-\dfrac{x_5}{2}-1,\\ x_5=x_5,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=k,\\ x_2=k-1,\\ x_3=0,\\ x_4=k-1,\\ x_5=-2k\end{cases}\quad (k\text{ 为任意数}).$$

方程组有无穷多解.

下面各题中不再写出变换过程,请读者自己写出,变换过程不是唯一的,但解是确定的.

(2) $$\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&0&-3&2&1\\1&-1&-3&1&-3&2\\2&-3&4&-5&2&7\\9&-9&6&-16&2&25\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c}1&2&0&-3&2&1\\0&-3&-3&4&-5&1\\0&0&11&-25/3&29/3&8/3\\0&0&0&0&0&-1\end{array}\right]$$

由增广矩阵第 4 行得等式 $0=-1$ 显然不成立,故方程组无解.

(3) $$\left[\begin{array}{cccc:c}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&1&1\\0&-7&3&1&-3\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&-8\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{array}\right]$$

方程组有唯一解:$x_1=-8,x_2=3,x_3=6,x_4=0$.

(4) $$\begin{bmatrix}3&4&-5&7\\2&-3&3&-2\\4&11&-13&16\\7&-2&1&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-3/17&13/17\\0&1&-19/17&20/17\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

对应

$$\begin{cases} x_1-\frac{3}{17}x_3+\frac{13}{17}x_4=0, \\ x_2-\frac{19}{17}x_3+\frac{20}{17}x_4=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{3}{17}k_1-\frac{13}{17}k_2, \\ x_2=\frac{19}{17}k_1-\frac{20}{17}k_2, \\ x_3=k_1, \\ x_4=k_2 \end{cases} \quad (k_1,k_2\text{ 为任意常数}).$$

方程组有无穷多解.

例 2 λ 为何值时,方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=\lambda, \\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=\lambda^2+\lambda \end{cases}$$

有解? 并求出其解.

解
$$\bar{A}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 & \lambda & \lambda^2+\lambda \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & \lambda-1 & \lambda^2 \end{array}\right]=\bar{B}.$$

(1) 当 $\lambda-1=0$,即 $\lambda=1$ 时,

$$\bar{B}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

由 $\bar{B}$ 的第 2 行知,$\lambda=1$ 时方程组无解.

(2) 当 $\lambda\neq1$ 时,

$$\bar{B}\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \lambda^2/(1-\lambda) \end{array}\right].$$

因为方程个数小于未知量个数,方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1, \\ x_2-x_3=-1, \\ x_3-x_4=\dfrac{\lambda^2}{1-\lambda}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{1-\lambda^3-2\lambda^2}{1-\lambda}-\lambda x_4, \\ x_2=\dfrac{\lambda^2+\lambda-1}{1-\lambda}+x_4, \\ x_3=\dfrac{\lambda^2}{1-\lambda}+x_4, \\ x_4=x_4. \end{cases}$$

例 3 λ 取何值时，方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=1, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2. \end{cases}$$

有解？并求出其解.

解 因为 $D=\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$，所以

(1) 当 $\lambda\neq1,\lambda\neq-2$ 时，$D\neq0$，方程组有唯一解，可由克拉默法则或消元法求出

$$x_1=\frac{-(\lambda+1)}{\lambda+2},\quad x_2=\frac{1}{\lambda+2},\quad x_3=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}.$$

(2) 当 $\lambda=1$ 时，三个方程完全相同. 此时方程个数小于未知量个数，故方程组有无穷多解

$$x_1=1-x_2-x_3,\quad x_2,x_3 \text{ 为任意数}.$$

(3) $\lambda=-2$ 时，增广矩阵

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=\overline{B},$$

由 $\overline{B}$ 的第 3 行知，此时方程组无解.

例 4 a,b 取何值时，方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - (b+2)x_3 = 3, \\ -3ax_2 + (a+2b)x_3 = -3. \end{cases}$$

有解？并求出其解.

解　因为 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -(b+2) \\ 0 & 3a & a+2b \end{vmatrix}=a(a-b)$，所以，

(1) 当 $a-b\neq 0, a\neq 0$ 时，$D\neq 0$，由克拉默法则，

$$x_1=1-1/a,\quad x_2=1/a,\quad x_3=0.$$

方程组有唯一解.

(2) 当 $a-b=0, a\neq 0$ 时，

$$\overline{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -a-2 & 3 \\ 0 & -3a & 3a & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

方程个数小于未知量个数，方程组有无穷多解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ ax_2 - ax_3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1-1/a, \\ x_2 = 1/a + x_3, \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

(3) 当 $a=0$，b 取任意数时，

$$\overline{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -b-2 & 3 \\ 0 & 0 & 2b & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]=\overline{\boldsymbol{B}},$$

由 $\overline{\boldsymbol{B}}$ 的第 3 行知，方程组无解.

第二节　n 维向量空间与线性相关性

主 要 内 容

1. 定义 1　数域 P 上一个 n 维向量是由数域 P 中 n 个数组

成的有序数组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，a_i 称为向量的**分量**.

2. **定义 2** 若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 的对应分量都相等，即 $a_i=b_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则称这两个**向量相等**，记为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

3. **定义 3** 向量 $\boldsymbol{\gamma}=(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$与 $\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$的**和**，记为 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 有性质：

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}.$$

4. **定义 4** 向量 $\boldsymbol{0}=(0, \ 0, \ \cdots, \ 0)$称为**零向量**；向量$(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的**负向量**，记为$-\boldsymbol{\alpha}$. 有性质：

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta}).$$

5. **定义 5** 设 k 为数域 P 中的数，向量$(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$与数 k 的**数量乘积**，记为 $k\boldsymbol{\alpha}$. 有性质：

$$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}, \quad (k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha},$$

$$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}, \quad 1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}, \quad 0\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0},$$

$$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}, \quad k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}, \quad k\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0} \ (k\neq 0, \boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}).$$

6. **定义 6** 设 V 是数域 P 上 n 维向量的非空集合，若对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in V$ 和 $k\in P$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V$ 和 $k\boldsymbol{\alpha}\in V$，则称 V 是数域 P 上的 **n 维向量空间**.

7. **定义 7** 若有数域 P 中的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s,$$

则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 为向量 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 的一个**线性组合**. 也称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以经 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ **线性表出**.

8. **定义 8** 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 中每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,t)$都可以经向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 称为可以经向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ **线性表出**. 若两个向量组可以相互线性表出，则称这两个向量组**等价**.

向量组之间的等价具有以下性质：

(1) 反身性　每一个向量组都与自身等价；

(2) 对称性　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价，则向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 也与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价；

(3) 传递性　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 等价，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_p$ 等价，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_p$ 等价.

9. 定义 9　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s\geqslant 2)$中有一个向量可以由其余向量线性表出，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 称为**线性相关的**.

任何一个包含零向量的向量组一定是线性相关的. 在 P 为实数域且为三维时，$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1=k\boldsymbol{\alpha}_2$（或 $\boldsymbol{\alpha}_2=k\boldsymbol{\alpha}_1$），表示向量 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 共线；三个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关的几何意义是它们共面.

10. 定义 10　若有数域 P 中不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s\geqslant 1)$为**线性相关的**.

11. 定义 11　若没有不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0},$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ $(n\geqslant 1)$**线性无关**.

若一个向量组的一部分线性相关，则这个向量组线性相关；若一个向量组线性无关，则它的任何一个非空部分组也线性无关.

12. 定理 1　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是两个向量组，若

(1) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以经 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，

(2) $r>s$，

则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关.

推论 1　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可以经向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则 $r\leqslant s$.

推论 2　任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

推论 3　两个线性无关的等价向量组必含有相同个数的向量.

13. **定义 12** 若一个向量组的部分组是线性无关的，并且从向量组中任意添加一个向量到此部分组后所得向量组都线性相关，则此部分组称为向量组的一个**极大无关组**.

一个向量组的极大无关组一般不唯一.

任意一个极大无关组都与向量组本身等价.

14. **定理 2** 一个向量组的极大无关组含有相同个数的向量.

15. **定义 13** 向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为向量组的**秩**.

一个向量组线性无关的充分必要条件为它的秩与它所含的向量个数相同.

等价的向量组有相同的秩.

全部由零向量组成的向量组的秩规定为零.

疑 难 解 析

1. 向量组的线性相关与线性无关有哪些性质?

答 (1) 包含零向量的向量组必线性相关；

(2) 只含一个非零向量的向量组必线性无关；

(3) 当 $s \geqslant 2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余向量线性表出；

(4) 当 $s \geqslant 2$ 时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是组中任何一个向量都不能由其余向量线性表出；

(5) 当 $s > n$ 时，s 个 n 维向量必线性相关；

(6) 若向量组的部分组线性相关，则向量组也线性相关，若向量组线性无关，则其任一非空部分组也线性无关；

(7) 若向量组线性无关，则添加分量后的向量组仍线性无关；

(8) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，且 $t > s$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 线性相关；

(9) 若向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出，且表示式唯一，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

2. 判别向量组的线性相关性有哪些常用方法?

答 (1) 用线性相关性定义.作

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

比较等式两端向量的对应分量,建立以 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 为未知量的齐次方程组,讨论齐次方程组是否有非零解;

(2) 利用疑难解析 1 中线性相关与线性无关的性质;

(3) 利用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩判别.若向量组的秩 $r<s$,则向量组线性相关;若向量组的秩 $r=s$,则向量组线性无关.

3. 如何求出一组向量的最大无关组,并用最大无关组表示其余向量?

答 设有一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,作矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s')$.对 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换,化为阶梯形矩阵,并使左上角为 r 级单位阵,则 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r.即向量组的最大无关组所含向量个数为 r,前 r 列所对应向量即为向量组的一个最大无关组,后 $s-r$ 列的元素反映该列所对应向量与最大无关组向量的关系.

方法、技巧与典型例题分析

认真辨析向量组线性相关与线性无关的概念,熟悉有关的等价命题,会讨论向量组与向量组之间的线性相关性,能够求出一个向量组的极大无关组是本节的基本要求.

例 1 判断下列命题哪些正确?对正确的说明理由;对错误的举出反例.

(1) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关,则其中每一向量都是其余向量的线性组合;

(2) 若有一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关;

(3) 若有一组全为零的数,使 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关;

(4) 若两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 均线性无

关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关；

(5) 若两个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 均线性无关，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s+\boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关；

(6) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ $(s>2)$线性无关的充要条件是任意两个向量线性无关(即两两线性无关).

解 (1) 错.应为其中至少有一个向量能为其它向量线性表出.例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,2)$是线性相关的，但 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) 错.应为对任何一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 才线性无关.例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,2)$，存在 $k_1=k_2=1$，使 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=(3,3)\neq\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关.

(3) 错.因为一组全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 对任何 s 个向量都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$.例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性相关，但 $0\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$.

(4) 错.$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 不一定线性无关.例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)$线性无关；$\boldsymbol{\beta}_1=(1,2)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(2,1)$线性无关，但 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，显然 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性相关.

(5) 错.不一定成立.例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1)$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=(2,4)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1,5)$均线性无关.但 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1=(3,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2=(3,6)$ 线性相关.

(6) 错.充分性不成立.例如，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3)$，它们两两线性无关，但 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

例 2 把向量 $\boldsymbol{\beta}$ 表成向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的线性组合.

(1) $\boldsymbol{\beta}=(1,2,1,1)$；$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1)$，
$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,1,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,-1,1)$.

(2) $\boldsymbol{\beta}=(0,0,0,1)$；$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,3,1)$，
$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,-1,-1)$.

解 分清线性组合与线性相关的不同.线性组合是指一个向量与一组向量之间的关系,线性相关是一组向量之间的关系.

设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$,比较对应分量写出对应方程组,对方程组系数的增广矩阵作初等变换,求出解 k_1,k_2,k_3,k_4.

(1) 对应方程组为

$$\begin{cases} k_1+k_2+k_3+k_4=1, \\ k_1+k_2-k_3-k_4=2, \\ k_1-k_2+k_3-k_4=1, \\ k_1-k_2-k_3+k_4=1. \end{cases}$$

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3\times 1/2 \\ r_4\times 1/2}]{r_2\times 1/2} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_i\times(-1) \\ i=2,3,4}]{r_2\leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_1-r_2]{r_4-r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4\times 1/2]{r_4-r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1/4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[i=2,3]{\substack{r_4\times(-1) \\ r_i-r_4}} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1-r_3} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & 5/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 \end{array}\right].$$

得 $k_1=5/4,k_2=1/4,k_3=-1/4,k_4=-1/4$,故

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{4}(5\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4).$$

(2) 对应方程组为

$$\begin{cases} k_1+2k_2+k_3 \qquad =0, \\ k_1+\ k_2+k_3+k_4=0, \\ \qquad 3k_2 \qquad -k_4=0, \\ k_1+\ k_2 \qquad -k_4=1. \end{cases}$$

写出增广矩阵 $\overline{A}$,进行初等行变换,解得

$$k_1=1,\quad k_2=0,\quad k_3=-1,\quad k_4=0,$$

故
$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3.$$

例 3 证明:若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出.

证 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关知,存在不全为零的 $k_1,\cdots,k_r,k_{r+1}$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r+k_{r+1}\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,故必 $k_{r+1}\neq 0$. 否则,有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$,而 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 不全为零,与题设矛盾. 于是

$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k_{r+1}}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k_{r+1}}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_r}{k_{r+1}}\boldsymbol{\alpha}_r.$$

例 4 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出,但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出,证明:$\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出.

证 由题设知,必然存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$ 使得

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

式中 k_r 必不为零. 否则 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_{r-1}\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$,即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$ 线性表出,这与题设矛盾. 故

$$\boldsymbol{\alpha}_r=\left(-\frac{k_1}{k_r}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(-\frac{k_2}{k_r}\right)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\left(-\frac{k_{r-1}}{k_r}\right)\boldsymbol{\alpha}_{r-1}+\frac{1}{k_r}\boldsymbol{\beta}.$$

例 5 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})\ (i=1,2,\cdots,n)$. 证明:若 $|a_{ij}|\neq 0$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证 设存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$,则得线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}k_1+a_{21}k_2+\cdots+a_{n1}k_n=0,\\a_{12}k_1+a_{22}k_2+\cdots+a_{n2}k_n=0,\\\quad\vdots\\a_{1n}k_1+a_{2n}k_2+\cdots+a_{nn}k_n=0.\end{cases}$$

因系数行列式 $D=D'=|a_{ij}|\neq0$，所以齐次方程组只有零解，即 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全为零，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

例 6 设 $t_1,t_2,\cdots,t_r$ 是互不相同的数，$r\leqslant n$. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_i=(1,t_i,\cdots,t_i^{n-1})$ $(i=1,2,\cdots,r)$线性无关.

证 设有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$，则得

$$\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_r=0,\\t_1k_1+t_2k_2+\cdots+t_rk_r=0,\\\quad\vdots\\t_1^{n-1}k_1+t_2^{n-1}k_2+\cdots+t_r^{n-1}k_r=0.\end{cases}$$

当 $r=n$ 时，方程组系数行列式为范德蒙行列式，故 $D=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(t_j-t_i)\neq0$. 所以方程组只有零解，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

例 7 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

证 设

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0},$$

即

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，故

$$\begin{cases}k_1+k_3=0,\\k_1+k_2=0,\\k_2+k_3=0,\end{cases}\quad\text{解得}\begin{cases}k_1=0,\\k_2=0,\\k_3=0.\end{cases}$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关.

例 8 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

证 设$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中任意$r$个线性无关的向量. 由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$r$，故$r+1$个向量$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$，$\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$必然线性相关，即$\boldsymbol{\alpha}_i$可由$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_r}$线性表出，因而它是原向量组的一个极大线性无关组.

例 9 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的秩为$r$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中的$r$个向量，使得$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$中每个向量都可被它们线性表出. 证明：$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$是$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$的一个极大无关组.

证 由题设可知$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$等价，因而有相同的秩$r$，从而知$\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$必线性无关，故它是原向量组的一个极大线性无关组.

例 10 证明：一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一个极大线性无关组.

证一 设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_s}$是向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的一个线性无关组，而向量组Ⅲ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是Ⅱ的一个极大无关组，则Ⅰ可由Ⅲ线性表出，于是Ⅲ中存在s个向量(例如前s个)用Ⅰ代替后得到的向量组Ⅳ：$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_s},\boldsymbol{\beta}_{s+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$与Ⅲ等价，从而Ⅳ是Ⅱ的一个极大无关组，即线性无关组Ⅰ可以扩充为Ⅱ的一个极大线性无关组.

证二 设向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_s}$是向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的一个线性无关组. 若Ⅱ中每个向量都能由Ⅰ线性表出，则Ⅰ是Ⅱ的一个极大无关组. 若Ⅱ中向量$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$不能由Ⅰ线性表出，则向量组Ⅴ：$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_s},\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$也是Ⅱ的线性无关组.

当$r=s+1$时，Ⅴ即为Ⅱ的一个极大无关组.

当$r>s+1$时，Ⅴ中必存在$\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$不能由Ⅴ线性表出，于是，$\boldsymbol{\alpha}_{j_1},\boldsymbol{\alpha}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{j_s},\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2}$线性无关.

继续上述过程，最后总能得到一个包含Ⅰ的线性无关组，使Ⅱ中每个向量都可由它线性表出，所以它是Ⅱ的一个包含Ⅰ的极大线性无关组. 从而知每个线性无关组都可扩充为极大无关组.

例 11 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=$

$(3,0,7,14)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$.

(1) 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关；

(2) 把 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充成一个极大无关组.

证 (1) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq k\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

解 (2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关.

设 $\boldsymbol{\alpha}_4=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，得方程组

$$\begin{cases} k_1 = 1, \\ -k_1+3k_2=-1, \\ 2k_1+k_2=2, \\ 4k_1+2k_2=0. \end{cases}$$

由其中第三与第四方程矛盾知，方程组无解. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

又设 $\boldsymbol{\alpha}_5=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，得方程组

$$\begin{cases} k_1+k_3=2, \\ -k_1+3k_2-k_3=1, \\ 2k_1+k_2+2k_3=5, \\ 4k_1+2k_2=6. \end{cases}$$

解得 $k_1=2,k_2=1,k_3=0$，知 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出. 所以原向量组中任一向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充成的一个极大线性无关组.

例 12 用消元法求下列向量组的极大线性无关组与秩：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(6,4,1,-1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,2,3,-4)$，
$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,4,-9,-16,22)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(7,1,0,-1,3)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$，
$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$.

解 将向量按列写出矩阵，作初等行变换.

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 \\ 4 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -9 & 0 \\ -1 & 3 & -16 & -1 \\ 2 & -4 & 22 & 3 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & 5 & -25 & -1 \\ 0 & -8 & 40 & 3 \\ 0 & -8 & 40 & 1 \\ 0 & -11 & 55 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -9 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，故极大无关组向量个数为 3. 所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$（或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$）为一个极大无关组.

$$(2)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 3，极大无关组向量个数为 3. 可取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$ 或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为极大线性无关组.

例 13 证明：如果向量组 Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_l$ 可以由向量组 Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表出，则 Ⅰ 的秩不超过 Ⅱ 的秩.

证 设 Ⅰ 的秩为 r，Ⅱ 的秩为 s，则 Ⅰ 的极大无关组可由 Ⅱ 的极大无关组线性表出. 由主要内容中定理 1 的推论 1，知 $r\leqslant s$.

例 14 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，已知单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 可被它们线性表出，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩为 r，则必有 $r\leqslant n$；又 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，而 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 的秩为 n，故由例 13 知 $n\leqslant r$. 综合知 $r=n$. 所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

例 15 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量都可由它们线性表出.

证 充分性 设任意 n 维向量都可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出，则 n 维单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 也可由它们线性表出. 故由例 14 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

必要性 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，则 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 可由它们线性表出，而任一 n 维向量均可由 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性表出，故任一 n 维向量均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出.

例 16 求下列向量组的一个极大无关组，并将其余向量用极大无关组表出.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,3,3,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(4,5,-2,6)$，$\boldsymbol{\alpha}_5=(-3,-5,-1,-7)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1,2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3,-1,5,-3,-1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(5,0,7,-5,-4)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(2,1,2,-2,-3)$.

解 以向量为列作矩阵，对矩阵作初等行变换求极大无关组.

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\2&1&3&5&-5\\1&-1&3&-2&-1\\3&1&5&6&-7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&-2&2&-6&2\\0&-2&2&-6&2\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&4&-3\\0&-1&1&-3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&2&1&-2\\0&1&-1&3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

知 A 的秩为 2，选 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为一个极大无关组，则 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=$

$\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

(2) 也可以换一种作法，以向量为行作矩阵，进行初等行变换.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1\\ 5 & 0 & 7 & -5 & -4\\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3\end{bmatrix}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\\ \boldsymbol{\alpha}_4\end{matrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7\\ 0 & 10 & -8 & 0 & -14\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7\end{bmatrix}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_4-2\boldsymbol{\alpha}_1\end{matrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 & -1 & 2\\ 0 & 5 & -4 & 0 & -7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3-5\boldsymbol{\alpha}_1-2(\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_4-2\boldsymbol{\alpha}_1-(\boldsymbol{\alpha}_2-3\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2\end{matrix}$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为一个极大无关组. 由 $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0},\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，得 $\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$.（矩阵的秩的概念请参看第三节.）

将运算过程写在矩阵右边，更易于观察向量之间的关系.

例 17 证明：方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

对任何 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式 $|a_{ij}|\neq 0$.

证 充分性 设 $|a_{ij}|\neq 0$，则方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 的秩均为 n. 故方程组对任何 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 都有解.

必要性 因为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$，则方程组有解对应于

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

有解. 即 $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出. 因为 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 任意, 即 $\boldsymbol{b}$ 任意, 故由例 15 知, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 所以 $|a_{ij}|\neq 0$.

例 18 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 有相同的秩, 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

证 显然, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出. 设 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_t}(t\leqslant r)$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的一个极大无关组, 则由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 有相同的秩知, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_t}$ 也是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大无关组. 所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出. 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 等价.

例 19 设 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$, 证明: $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 有相同的秩.

证 只需证两向量组等价.

由题设已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出.

因为由题设可得

$$\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_r=(r-1)(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r),$$

则
$$\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_r=\frac{1}{r-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_r)$$

即
$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\boldsymbol{\beta}_i+\frac{1}{r-1}(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+\boldsymbol{\beta}_r)\quad(i=1,2,\cdots,r),$$

故知, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 也可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出, 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 等价, 从而有相同的秩.

例 20 假设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以经 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出, 证明: 表示法是唯一的充分必要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

证 必要性 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$, 且表示法唯一. 用反证法, 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关, 则存在不全为零的数 $l_1,l_2,\cdots,l_r$, 使得

$$l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r=\boldsymbol{0},$$

将上两式相加, 得

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r+l_r)\boldsymbol{\alpha}_r.$$

由于 $l_1,l_2,\cdots,l_r$ 不全为零，故 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种不同表示法，这与题设矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 必线性无关.

充分性　设 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种表示法：$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_r\boldsymbol{\alpha}_r$，两式相减得

$$(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r-l_r)\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，则必有 $k_1=l_1,k_2=l_2,\cdots,k_r=l_r$，即 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 表出的表示法唯一.

例 21　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是一组线性无关的向量，$\boldsymbol{\beta}_i=\sum\limits_{j=1}^{r}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j,i=1,2,\cdots,r$. 证明：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0. \qquad ①$$

证　设有 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=\mathbf{0}$，则

$$\sum_{i=1}^{r}k_i\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{i=1}^{r}k_i\Big(\sum_{j=1}^{r}a_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j\Big)\text{（和号可交换性）}$$
$$=\sum_{j=1}^{r}\Big(\sum_{i=1}^{r}k_ia_{ij}\Big)\boldsymbol{\alpha}_j=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，故

$$\sum_{i=1}^{r}k_ia_{ij}=0\quad(j=1,2,\cdots,r),$$

所以，依关于 k_i 的齐次线性方程组只有零解的充分必要条件是其系数行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\neq 0,$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关的充分必要条件是 $|a_{ij}|\neq 0$.

例 22 证明：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$（其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$）线性相关的充分必要条件是至少有一个 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant s)$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表出.

证 充分性是显然的.

必要性 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在不全为零的数 k_1，$k_2,\cdots,k_s$，使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_i\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

设 k_i 以后的数都为零，则有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$，故不可能有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$，所以，$1<i\leqslant r$，且因 $k_i\neq 0$，得

$$\boldsymbol{\alpha}_i=-\frac{k_1}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{i-1}}{k_i}\boldsymbol{\alpha}_{i-1},$$

即 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 可被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表出.

例 23 已知两向量组有相同的秩，且其中一个可被另一个线性表出，证明：这两个向量组等价.

证 设有向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$，其秩均为 r，且Ⅰ可由Ⅱ线性表出.

设Ⅰ与Ⅱ的极大无关组分别为 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 和 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$，由题设知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 也可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性表出，故 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 也可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性表出，从而向量组Ⅲ：$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r},\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 也可由 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性表出. 于是，由例 13 知，Ⅲ的秩不大于 r. 又因Ⅲ含 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$，故Ⅲ的秩不小于 r. 综上即知Ⅲ的秩等于 r.

由此得出，Ⅲ中任意 r 个线性无关向量都是Ⅲ的极大无关组，则 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 是Ⅲ的一个极大无关组，因而 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\boldsymbol{\beta}_{j_2},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 可由它线性表出，即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由它线性表出，亦即 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出. 从而，向量组Ⅰ与向量组Ⅱ等价.

例 24 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为 r，在其中任取 m 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$，证明：此向量组的秩 $\geqslant r+m-s$.

证 因为在 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中减去一个向量后，其秩至多减少

1，则在其中减去 m 个向量后，其秩至多减少 m. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots$ $\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 可以视作 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中去掉 $s-m$ 个向量后得到的，因而 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1}$，$\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_m}$ 的秩至少是 $r-(s-m)=r+m-s$.

例 25 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s;\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t;\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3. 证明：

$$\max(r_1,r_2)\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

证 若 r_1,r_2 中有为零的，则结论显然成立.

若 $r_1\neq 0,r_2\neq 0$，因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 均可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表出，所以 $r_1\leqslant r_3,r_2\leqslant r_3$，故 $\max(r_1,r_2)<r_3$.

又据题设可以得出：$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的极大无关组必可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的极大无关组共同线性表出，所以 $r_3\leqslant r_1+r_2$. 于是

$$\max(r_1,r_2)\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

例 26 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots,\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$，证明：

(1) 当 m 为偶数时，向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关；

(2) 当 m 为奇数时，若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots$，$\boldsymbol{\beta}_m$ 也线性无关.

证 设有 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m=\mathbf{0}$，则有

$$(k_1+k_m)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_{m-1}+k_m)\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

(1) 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1 \qquad\qquad + k_m = 0, \\ k_1 + k_2 \qquad\qquad = 0, \\ \qquad \vdots \\ \qquad k_{m-1} + k_m = 0. \end{cases} \qquad ①$$

因为 $D=1+(-1)^{m+1}$，所以 m 为偶数时 $D=0$，方程组有非零解，从而 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性相关.

(2) 当 m 为奇数时，$D\neq 0$. 由于

$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关$\Longleftrightarrow$式①成立，

故方程组只有零解，即 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$. 所以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 也

线性无关.

例 27 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0)'$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+2,-3a)'$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,-b-2,a+2b)'$, $\boldsymbol{\beta}=(1,3,-3)'$. 试讨论当 a,b 为何值时,

(1) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表出,写出表示式;

(3) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出,但表示式不唯一,写出表示式.

解 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}$ 为列写出矩阵 $(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})$, 其中 $\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$. 对 $(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})$ 施行初等行变换,得

$$(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 2 & a+2 & -b-2 & 3\\ 0 & -3a & a+2b & -3\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & a & -b & 1\\ 0 & 0 & a-b & 0\end{array}\right].$$

(1) 当 $a=0$, b 为任意常数时,有

$$(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -b & 1\\ 0 & 0 & -b & 0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

知 $r(\mathbf{A})\neq r(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})$,所以方程组无解, $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

(2) 当 $a\neq b$ 且 $a\neq 0$ 时, $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})=3$. 方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解: $k_1=1-1/a$, $k_2=1/a$, $k_3=0$, 即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一地线性表出为

$$\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{1}{a}\boldsymbol{\alpha}_2.$$

(3) 当 $a=b\neq 0$ 时,有

$$(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 0 & 0 & 1-1/a\\ 0 & 1 & -1 & 1/a\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right].$$

知 $r(\mathbf{A})=r(\mathbf{A},\boldsymbol{\beta})=2$,故方程组 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$ 有无穷多解,其全部解为

$$k_1=1-1/a,\quad k_2=(1/a+c),\quad k_3=c.$$

式中 c 为任意常数. $\boldsymbol{\beta}$ 可线性表出为(不唯一)

$$\boldsymbol{\beta}=\left(1-\frac{1}{a}\right)\boldsymbol{\alpha}_1+\left(\frac{1}{a}+c\right)\boldsymbol{\alpha}_2+c\,\boldsymbol{\alpha}_3.$$

例 28 确定常数 a，使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,a)'$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,1)'$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,1,a)'$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-2,a,4)'$，$\boldsymbol{\beta}_3=(-2,a,a)'$ 线性表出，但向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出.

解 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，则应有 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$ 的秩大于 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 的秩，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 必线性相关.

由
$$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{vmatrix}=0\Rightarrow a=1 \text{ 或 } a=-2.$$

当 $a=1$ 时，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow r(\boldsymbol{B})=1,$$

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\1&1&1\\1&4&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=3,$$

故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，而 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_1$.

当 $a=-2$ 时，

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{bmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&-2\\0&-3&3\\0&-3&3\end{bmatrix}\Rightarrow r(\boldsymbol{B})=2,$$

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)=\begin{bmatrix}1&-2&-2\\1&-2&-2\\-2&4&-2\end{bmatrix}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})=2,$$

此时，$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1$，但对 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$，由于

$$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&-2&-2\\-2&1&-2\end{vmatrix}=18\neq0,$$

知 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不能由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出. 故符合要求的是 $a=1$.

第三节　矩 阵 的 秩

主 要 内 容

1. 定义 1　矩阵的**行秩**指矩阵的行向量组的秩，矩阵的**列秩**指矩阵的列向量组的秩.

2. 引理　若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的行秩 $r<n$，则方程组有非零解.

定理 1　矩阵的行秩与列秩相等.

矩阵的行秩与列秩统称矩阵的秩(记为 rank)

3. 定理 2　$n\times n$ 矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的行列式为零的充分必要条件是 $\mathbf{A}$ 的秩小于 n.

推论　齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

有非零解的充分必要条件是它的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的行列式 $|\mathbf{A}|=0$.

4. 定义 2　在一个 $s\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 中任意选定 k 行和 k 列，位于选定行列交点处的 k^2 个元素按原来的次序所组成的 k 阶行列式称为 $\mathbf{A}$ 的一个 **k 阶子式**. $k\leqslant\min(s,n)$.

5. 定理 3 矩阵的秩为 r 的充分必要条件是矩阵中有一个 r 阶子式不为零，同时所有的 $r+1$ 阶子式全为零.

疑 难 解 析

怎样求矩阵的秩?

答 求矩阵的秩的方法如下.

(1) 对矩阵作行的初等变换，把矩阵化为阶梯形，由非零行个数确定矩阵的秩(也可以作列的初等变换来求).

(2) 逐级计算矩阵的各阶子式，若有某个 r 阶子式不为零，而所有 $r+1$ 阶子式全为零，则矩阵的秩为 r.(事实上，可以通过观察确定 r 阶子式不为零.)

(3) 综合(1)、(2)的方法，先将矩阵经初等变换化为较简单矩阵，再计算各阶子式来确定秩.

(4) 求矩阵行向量组或列向量组的极大无关组，极大无关组所含向量个数即为矩阵的秩.

也有人采用求等价矩阵的方法来求秩. 但要注意：等价矩阵必等秩，但等秩的矩阵不一定等价.

方法、技巧与典型例题分析

熟悉计算矩阵的秩的方法和技巧，能够讨论与矩阵秩的有关命题.

例 1 求矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

解 因为矩阵的任意两行(列)都线性相关，所以秩$(\mathbf{A})\leqslant 1$.

因为秩$(\mathbf{A})=0 \Longleftrightarrow a_ib_j=0 \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$.

若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq \mathbf{0}$，则$(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\mathbf{0}$，

若$(b_1,b_2,\cdots,b_n)\neq \mathbf{0}$，则$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\mathbf{0}$.

故　当$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq\mathbf{0}$，$(b_1,b_2,\cdots,b_n)\neq\mathbf{0}$时，秩$(\mathbf{A})=1$.

当$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\mathbf{0}$，$(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\mathbf{0}$时，秩$(\mathbf{A})=0$.

例 2　证明：n个m维向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})'$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{m2})'$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{mn})'$线性无关的充分必要条件是矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的秩等于n.

证　由秩$(\mathbf{A})=n$知，必有$n\leqslant m$，且$\mathbf{A}$中有n阶子式不等于0.设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0.$$

则由克拉默法则知，以D为系数行列式的齐次线性方程组只有零解，从而系数矩阵为$\mathbf{A}$的齐次线性方程组也只有零解.从而$\mathbf{A}$的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关.

反之，若$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性无关，则以$\mathbf{A}$为系数矩阵的齐次线性方程组只有零解，从而秩$(\mathbf{A})=n$.

例 3　计算下列矩阵的秩：

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{bmatrix}$.

解 一般都用初等变换法求秩.

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_4]{r_2 \times 1/2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{r_4-r_2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

所以,秩$(\boldsymbol{A})=4$.

$$(2)\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

所以,秩$(\boldsymbol{A})=3$.

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\1&2&3&14&32\\4&5&6&32&77\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1&4\\0&1&0&2&5\\0&0&1&3&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$.

所以,秩$(\boldsymbol{A})=3$.

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&1&1&0\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$.

所以,秩$(\boldsymbol{A})=5$.

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}14&12&6&8&2\\6&104&12&9&17\\7&6&3&4&1\\35&30&15&20&5\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\6&104&12&9&17\\7&6&3&4&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$.

所以,秩$(\boldsymbol{A})=2$.

例 4 求下列矩阵的秩

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\a_1&a_2&a_3&a_4&a_5\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&a_4^2&a_5^2\\a_1^3&a_2^3&a_3^3&a_4^3&a_5^3\\(a_1+1)^3&(a_2+1)^3&(a_3+1)^3&(a_4+1)^3&(a_5+1)^3\end{bmatrix}.$$

解 因$\boldsymbol{A}$的 5 阶子式$|\boldsymbol{A}|$中第 5 行是前 4 行的线性组合,即

$r_5=r_1+3r_2+3r_3+r_4$，所以 $|\boldsymbol{A}|=0$，秩$(\boldsymbol{A})\leqslant 4$. 又

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \end{vmatrix}$$

是一范德蒙行列式，不等于零，故秩$(\boldsymbol{A})=4$.

例 5 在 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中任取 s 列作一 $m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 且设秩$(\boldsymbol{A})=r$，证明：$r+s-n\leqslant$秩$(\boldsymbol{B})\leqslant r$.

证 考察 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组的极大无关组的秩.

设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s})$，因为 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一部分，所以 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出，从而秩$(\boldsymbol{B})\leqslant$秩$(\boldsymbol{A})=r$.

又秩$(\boldsymbol{A})=r$，所以 $\boldsymbol{A}$ 中有一个含 r 个向量的极大线性无关组，除此之外，$\boldsymbol{A}$ 中还含 $n-r$ 个向量，故 $\boldsymbol{B}$ 中至少含有该极大无关组中的 $s-(n-r)$ 个向量，而它们又是线性无关的. 从而知 $\boldsymbol{B}$ 中至少有 $s-(n-r)$ 个向量线性无关.

第四节　线性方程组解的判别定理与解的结构

主 要 内 容

1. 线性方程组有解的判别定理　线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=b_s. \end{cases} \qquad ①$$

有解的充分必要条件是它的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 有相同的秩.

2. 齐次线性方程组解具有以下性质：

(1) 两个解的和还是方程组的解；

(2) 一个解的倍数还是方程组的解.

3. 定义 1 齐次线性方程组的一组解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 称为方程组的一个**基础解系**，如果

(1) 齐次方程组的任一解都能表成 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 的线性组合；

(2) $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性无关.

4. 定理 1 在齐次线性方程组有非零解的情况下，方程组有基础解系，且基础解系所含解的个数等于 $n-r$(这里 r 表示系数矩阵的秩).

非齐次线性方程组的两个解的差是它的导出组(对应齐次线性方程组)的解，非齐次线性方程组的一个解与其导出组的一个解之和是这个线性方程组的一个解.

5. 定理 2 如果 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是非齐次线性方程组的一个特解，则方程组的任一解 $\boldsymbol{\gamma}$ 都可表成 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}$. 式中 $\boldsymbol{\eta}$ 是其导出组的解.

对于非齐次线性方程组的任一特解 $\boldsymbol{\gamma}_0$，当 $\boldsymbol{\eta}$ 取遍它的导出组的解时，$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+\boldsymbol{\eta}$ 就给出非齐次线性方程组的全部解.

若 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是非齐次线性方程组的一个特解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系，则非齐次线性方程组的任一解 $\boldsymbol{\gamma}$ 可以表成

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}\quad(k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in P).$$

推论 非齐次线性方程组有解时，有唯一解的充分必要条件是它的导出组只有零解.

疑难解析

1. 怎样求齐次线性方程组的基础解系?

答 求齐次线性方程组的基础解系的过程是：

(1) 写出齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$.

(2) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换，化为阶梯形矩阵(左上方为 r 阶单位阵).

(3) 写出对应同解方程组

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n, \\ \quad \vdots \\ x_r = -c_{r_r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n. \end{cases}$$

用 $n-r$ 组数，通常取 $(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0)\cdots(0,0,\cdots,1)$ 代替自由未知量 $(x_{r+1},x_{r+2},\cdots,x_n)$，得到 $n-r$ 个解

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ \vdots \\ -c_{r_{r+1}} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} -c_{1r+1} \\ \vdots \\ -c_{r_{r+2}} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r} = \begin{bmatrix} -c_{1n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 即为齐次线性方程组的一个基础解系.

2. 怎样求非齐次线性方程组的全部解?

答 求非齐次线性方程组的全部解的过程是:

(1) 写出非齐次线性方程组的增广矩阵 $\bar{\boldsymbol{A}}$.

(2) 对 $\bar{\boldsymbol{A}}$ 施行初等行变换，化为阶梯形矩阵.

若秩 $(\boldsymbol{A}) \neq$ 秩 $(\bar{\boldsymbol{A}})$. 则非齐次线性方程组无解；若秩 $(\boldsymbol{A}) =$ 秩 $(\bar{\boldsymbol{A}}) = n$(未知量个数)，则方程组有唯一解；若秩 $(\boldsymbol{A}) =$ 秩 $(\bar{\boldsymbol{A}}) < n$，则方程组有无穷多解.

(3) 若方程组有唯一解，可用克拉默法则求出解.

若方程组有无穷多解，先令自由未知量均为零，得出非齐次方程组一个特解 γ_0；再令自由未知量取 $n-r$ 组数，得出导出组的一个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$，得非齐次线性方程组的解

$$\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 + \cdots + k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}.$$

3. 求含参数的线性方程组的解常用什么方法?

答 要区别具体情形处理.

(1) 若方程个数等于未知量个数.

法一(行列式法) 适用 $\mathbf{A}$ 中有参数情形. 先计算 $D=|\mathbf{A}|$,它是关于参数的函数式. 当参数取值使 $D\neq 0$ 时,由克拉默法则,方程组有唯一解. 再将使 $D=0$ 的值逐个代入 $\bar{\mathbf{A}}$,若秩$(\mathbf{A})\neq$秩$(\bar{\mathbf{A}})$,则方程组无解;若秩$(\mathbf{A})=$秩$(\bar{\mathbf{A}})$,则方程组有无穷多解.

法二(初等行变换法) 用初等行变换化 $\bar{\mathbf{A}}$ 为阶梯形矩阵,讨论参数取何值时秩$(\mathbf{A})\neq$秩$(\bar{\mathbf{A}})$,此时方程组无解;取何值时,秩$(\mathbf{A})=$秩$(\bar{\mathbf{A}})<n$,此时方程组有无穷多解;取何值时,秩$(\mathbf{A})=$秩$(\bar{\mathbf{A}})=n$,此时方程组有唯一解.

(2) 若方程个数不等于未知量个数,只能用初等行变换法讨论.

方法、技巧与典型例题分析

对方程组求解前,先要对方程组解的结构与解的性质有清晰的了解,明确求解的步骤. 然后对求解中的问题进行详细的讨论,并给出确定的结果.

例 1 讨论 λ,a,b 取什么值时下列方程组有解,并求出解.

(1) $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=4,\\ x_1+bx_2+x_3=3,\\ x_1+2bx_2+x_3=4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}(\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=\lambda,\\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=2\lambda,\\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=3.\end{cases}$

解 (1) 在本章第一节例 3 中,已经讨论过此题.

(2) 因为 $D=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&b&1\\1&2b&1\end{vmatrix}=-b(a-1)$,

故当 $a\neq1,b\neq0$ 时有唯一解. 由克拉默法则求得

$$x_1=\frac{2b-1}{b(a-1)},\quad x_2=\frac{1}{b},\quad x_3=\frac{1+2ab-4b}{b(a-1)}.$$

当 $b=0$ 时,因为

$$\bar{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}a&1&1&4\\1&0&1&3\\1&0&1&4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}a&1&1&4\\1&0&1&3\\0&0&0&1\end{array}\right],$$

知秩$(\mathbf{A})\neq$秩$(\bar{\mathbf{A}})$,所以方程组无解.

当 $a=1$ 时,因为

$$\bar{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&4\\1&b&1&3\\1&2b&1&4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&4\\0&b-1&0&-1\\0&2b-1&0&0\end{array}\right],$$

若 $b=1/2$,则

$$\vec{\mathbf{A}}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&4\\0&-1/2&0&-1\\0&0&0&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&0&1&2\\0&1&0&2\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

知秩$(\mathbf{A})=$秩$(\bar{\mathbf{A}})=2<3$,方程组有无穷多解. 可取 $x_3=k$(任意常数),则方程组解为

$$x_1=2-k,\quad x_2=2,\quad x_3=k.$$

若 $b\neq1/2$,则

$$\vec{\mathbf{A}}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&4\\0&b-1&0&-1\\0&1&0&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:c}1&1&1&4\\0&1&0&0\\0&0&0&-1\end{array}\right],$$

知秩$(\mathbf{A})\neq$秩$(\bar{\mathbf{A}})$,故方程组无解.

(3) $$D=\begin{vmatrix}\lambda+3&1&2\\\lambda&\lambda-1&1\\3\lambda+3&\lambda&\lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1),$$

知当 $\lambda\neq0,1$ 时,方程组有唯一解. 因为 $D_1=\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9$, $D_2=\lambda^3+12\lambda-9$, $D_3=-4\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda-9$,所以

$$x_1=\frac{\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)},\quad x_2=\frac{\lambda^3+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)},\quad x_3=\frac{-4\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}.$$

当 $\lambda=0$ 或 1 时，因为秩$(\boldsymbol{A})\neq$秩$(\bar{\boldsymbol{A}})$，所以方程组无解.

例 2 求下列齐次线性方程组的一个基础解系，并用它表出全部解.

(1) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=0, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=0, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0, \\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4+x_5=0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0. \end{cases}$

解 (1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=x_3+x_4+5x_5, \\ x_2=-2x_3-2x_4-6x_5. \end{cases}$

通解为 $\begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 5k_3, \\ x_2 = -2k_1 - 2k_2 - 6k_3, \\ x_3 = k_1, \\ x_4 = k_2, \\ x_5 = k_3 \end{cases}$ (k_1, k_2, k_3 为任意常数).

基础解系为

$\boldsymbol{\eta}_1 = (1, -2, 1, 0, 0)', \boldsymbol{\eta}_2 = (1, -2, 0, 1, 0)', \boldsymbol{\eta}_3 = (5, -6, 0, 0, 1)'$.

$$(2)\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -7/6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -x_3 + 7/6 \cdot x_5, \\ x_2 = x_3 + 5/6 \cdot x_5, \\ x_4 = 1/3 \cdot x_5. \end{cases}$

取 $\begin{pmatrix} x_3 \\ x_5 \end{pmatrix}$ 为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = (-1, 1, 1, 0, 0)', \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \left(\frac{7}{6}, \frac{5}{6}, 0, \frac{1}{3}, 1\right)'.$$

$$(3)\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & -5 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -13/3 \end{bmatrix}.$$

同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = 2x_5, \\ x_2 = 4x_5, \\ x_3 = \dfrac{8}{3}x_5, \\ x_4 = \dfrac{13}{3}x_5. \end{cases}$

基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=(6,12,8,13,3)'$.

(4) $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2&1&-1&1\\2&1&-1&2&-3\\3&-2&-1&1&-2\\2&-5&1&-2&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1/2&-7/8\\0&1&0&1/2&-5/8\\0&0&1&-1/2&5/8\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

同解方程组为
$$\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}x_4+\dfrac{7}{8}x_5,\\x_2=-\dfrac{1}{2}x_4+\dfrac{8}{5}x_5,\\x_3=\ \ \dfrac{1}{2}x_4-\dfrac{5}{8}x_5.\end{cases}$$

基础解系为
$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,-1,1,2,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_2=(7,5,-5,0,8)'.$$

例 3 用导出组的基础解系表出第一节例 1 中题(1),(4)线性方程组的全部解.

解 由导出组的解,写出基础解系、非齐次方程组的全部解.

(1) 基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=(1,1,0,1,-2)$,全部解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\-2\end{bmatrix}.$$

(2) 基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=(3,19,17,0)'$,$\boldsymbol{\eta}_2=(13,20,0,-17)'$,全部解为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}3\\19\\17\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}13\\20\\0\\-17\end{bmatrix}.$$

例 4 a,b 取什么值时,线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b. \end{cases}$$

有解？在有解的情况下，求一般解.

解 先对 $\bar{A}$ 作初等行变换，讨论阶梯形矩阵，作出是否有解的判断；再代入参数值求解.

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & a \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & b \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b-2 \end{array}\right]$$

当 $a\neq 0$ 或 $b\neq 2$ 时，秩$(\boldsymbol{A})\neq$秩$(\bar{\boldsymbol{A}})$，方程组无解；当 $a=0$ 且 $b=2$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=$秩$(\bar{\boldsymbol{A}})<5$，方程组有无穷多解.

同解方程组为 $\begin{cases} x_1=-2+x_3+x_4+5x_5, \\ x_2=3-2x_3-2x_4-6x_5. \end{cases}$

一般解为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+k_3\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

例 5 设 $x_1-x_2=a_1, x_2-x_3=a_2, x_3-x_4=a_3, x_4-x_5=a_4, x_5-x_1=a_5$. 证明：这个方程组有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{5}a_i=0$. 在有解的情况下，求出它的一般解.

证 $$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc:c}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^{5} a_i\end{array}\right],$$

知，秩$(\mathbf{A})$=秩$(\overline{\mathbf{A}})\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{5} a_i=0$. 故方程组有解的充分必要条件是 $\sum_{i=1}^{5} a_i=0$. 由同解方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1, \\ x_2-x_3=a_2, \\ x_3-x_4=a_3, \\ x_4-x_5=a_4,\end{cases}$$

得一般解

$$\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2 \\ a_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_3 \\ a_3 \\ a_3 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_4 \\ a_4 \\ a_4 \\ a_4 \\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}k \\ k \\ k \\ k \\ k\end{bmatrix}.$$

例 6 证明：与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

证 因为与基础解系等价的线性无关组的向量可以由基础解系线性表出，所以也是解向量. 因为等价，方程组的每个解向量均可由其线性表出. 又其自身是线性无关的，故也是一个基础解系.

例 7 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的系数矩阵的秩为 r，证明：方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系.

证 显然，齐次线性方程组的基础解系含 $n-r$ 个线性无关的向量. 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是其一基础解系，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解向量，而 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r},\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 的秩仍为 $n-r$. 则由本章第二节例 8 知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 等价，利用例 6 结论知，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 是方程组的基础解系.

例 8 证明：若 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是一线性方程组的解，则 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+u_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t\left(\sum_{i=1}^{t}u_i=1\right)$ 也是一个解.

证 设非齐次线性方程组的特解为 $\boldsymbol{\gamma}_0$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$ 为其导出组的一个基础解系，则非齐次方程组的一般解为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_0+(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}).$$

而 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是齐次线性方程组的解，则

$$\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{\gamma}_0+(k_{i_1}\boldsymbol{\xi}_1+k_{i_2}\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{i_{n-r}}\boldsymbol{\xi}_{n-r})\quad(i=1,2,\cdots,t),$$

利用 $u_1+u_2+\cdots+u_t=1$，得

$$\begin{aligned}&u_1\boldsymbol{\eta}_1+u_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t\\&=(u_1+u_2+\cdots+u_t)\boldsymbol{\gamma}_0+\sum_{i=1}^{t}(u_ik_{i_1})\boldsymbol{\xi}_1+\cdots+\sum_{i=1}^{t}(u_ik_{i_{n-r}})\boldsymbol{\xi}_{n-r}\\&=\boldsymbol{\gamma}_0+(k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}),\end{aligned}$$

所以 $u_1\boldsymbol{\eta}_1+u_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+u_t\boldsymbol{\eta}_t$ 也是原方程组的解.

例 9 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+\ \ a_{12}x_2+\cdots+\ \ a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+\ \ a_{22}x_2+\cdots+\ \ a_{2n}x_n=0,\\\qquad\vdots\\a_{n-1\,1}x_1+a_{n-1\,2}x_2+\cdots+a_{n-1\,n}x_n=0.\end{cases}\qquad①$$

M_i 是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去第 i 行剩下的 $(n-1)\times(n-1)$ 矩阵的行列式.

(1) 证明：$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$ 是方程组的一个解.

(2) 如果 $\mathbf{A}$ 的秩为 $n-1$，则方程组的解全是$(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$的倍数.

证 (1) 作 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1\,1} & a_{n-1\,2} & \cdots & a_{n-1\,n} \end{vmatrix},$$

则 $D=0$，而 $M, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n$ 是 D 的第 1 行元素的代数余子式. 若将 D 按第 1 行展开，有

$$a_{11}M_1+a_{12}(-M_2)+\cdots+a_{1n}(-1)^{n-1}M_n=0.$$

若按其余行展开，有

$$a_{i1}M_1+a_{i2}(-M_2)+\cdots+a_{in}(-1)^{n-1}M_n=0 \quad (i=2,3,\cdots,n-1).$$

由此两式即知，$(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$是方程组①的一个解.

(2) 因为秩$(\mathbf{A})=n-1<n$，所以

$$\boldsymbol{\eta}=(M_1, -M_2, \cdots, (-1)^{n-1}M_n)$$

是方程组的非零解，恰含 $n-r=1$ 个向量，故 $\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\eta}$ 为方程组通解.

例 10 设 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$i=1,2,\cdots,s$，

$$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n),$$

证明：若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases} \qquad ①$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

证 增加一个方程作方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\vdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0, \\ bx_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0. \end{cases} \quad ②$$

由题设知，方程组①和②同解，其基础解系含有相同个数的解向量，即向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}$ 的秩相等. 由第二节例 18 知，两组向量等价，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出.

例 11 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是非齐次线性方程组的一个解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_t$ 是其导出组的一个基础解系. 令

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\eta}_0, \quad \boldsymbol{\gamma}_2=\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_0, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\gamma}_{t+1}=\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\eta}_0,$$

证明:线性方程组的任一解 $\boldsymbol{\gamma}$，都可表成

$$\boldsymbol{\gamma}=u_1\boldsymbol{\gamma}_1+u_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\gamma}_{t+1},$$

式中 $u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1$.

证 由题设，非齐次线性方程组的一般解可表为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\eta}_0+u_2\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\eta}_t \ (u_2,\cdots,u_{t+1}\text{为常数}).$$

取 $u_1=1-u_2-\cdots-u_{t+1}$，则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\gamma} &=(u_1+u_2+\cdots+u_{t+1})\boldsymbol{\eta}_0+u_2\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\eta}_t \\ &=u_1\boldsymbol{\eta}_0+u_2(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_0)+\cdots+u_{t+1}(\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\eta}_0) \\ &=u_1\boldsymbol{\gamma}_1+u_2\boldsymbol{\gamma}_2+\cdots+u_{t+1}\boldsymbol{\gamma}_{t+1}. \end{aligned}$$

例 12 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$为一实数域上的矩阵.

证明:(1) 若 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$;

(2) 若 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$，则 $|\boldsymbol{A}|>0$.

证 (1) 用反证法，以 $\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵的齐次线性方程组当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时只有零解. 若齐次线性方程组有非零解 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，

记$|x_{i_0}|=\max\limits_i|x_i|>0$，方程组的第 i_0 个方程为

$$a_{i_0 1}x_1+a_{i_0 2}x_2+\cdots+a_{i_0 n}x_n=0,$$

整理得

$$-a_{i_0 i_0}x_{i_0}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}a_{i_0 j}x_j,$$

于是

$$|a_{i_0 i_0}||x_{i_0}|=\left|\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}a_{i_0 j}x_j\right|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0 j}||x_j|,$$

从而

$$|a_{i_0 i_0}|\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0 j}|\frac{|x_j|}{|x_{i_0}|}\leqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}^{n}|a_{i_0 j}|,$$

与条件$|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$矛盾.故方程组只有零解，即$|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

(2) 作矩阵

$$\boldsymbol{A}(t)=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}t & \cdots & a_{1n}t\\ a_{21}t & a_{22} & \cdots & a_{2n}t\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1}t & a_{n2}t & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则 $\boldsymbol{A}(t)$满足题(1)的条件，故$|\boldsymbol{A}(t)|\neq 0$.

因为$|\boldsymbol{A}(t)|$的展开式是 t 的连续函数，且有

$$|\boldsymbol{A}(0)|=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}>0,\quad |\boldsymbol{A}(1)|=|\boldsymbol{A}|.$$

用反证法证$|\boldsymbol{A}|>0$. 设$|\boldsymbol{A}|<0$. 由于$|\boldsymbol{A}(0)|>0$，$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}(1)|<0$，故依连续函数的零点定理，存在 $t_0\in(0,1)$，使$|\boldsymbol{A}(t_0)|=0$，与$|\boldsymbol{A}(t)|\neq 0$ 矛盾. 故$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}(1)|>0$.

例 13 求出通过点 $M_1(1,0,0)$，$M_2(1,1,0)$，$M_3(1,1,1)$，$M_4(0,1,1)$的球面方程.

解 球面方程的一般形式为

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

将 M_1,M_2,M_3,M_4 四个点的坐标代入，得到四个关于 a,b,c,R^2 的方程. 由克拉默法则可以解得 $a=b=c=1/2$，$R^2=3/4$. 故球面方程为

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

例 14 求出通过点 $M_1(0,0)$,$M_2(1,0)$,$M_3(2,1)$,$M_4(1,1)$,$M_5(1,4)$的二次曲线的方程.

解 类似例 13. 因为二次曲线的一般方程为 $x^2+Axy+By^2+Cx+Dy+E=0$,将五个点的坐标代入方程可以得到关于 A,B,C,D,E 的五个方程. 解线性方程组得:$A=-2,B=0,C=-1,D=2,E=0$,故所求二次曲线方程为

$$x^2-2xy-x+2y=0.$$

例 15 在图 3.1 所示电路中,C、D 为结点,i 表示结点间的电流,求 i_1,i_2,i_3.

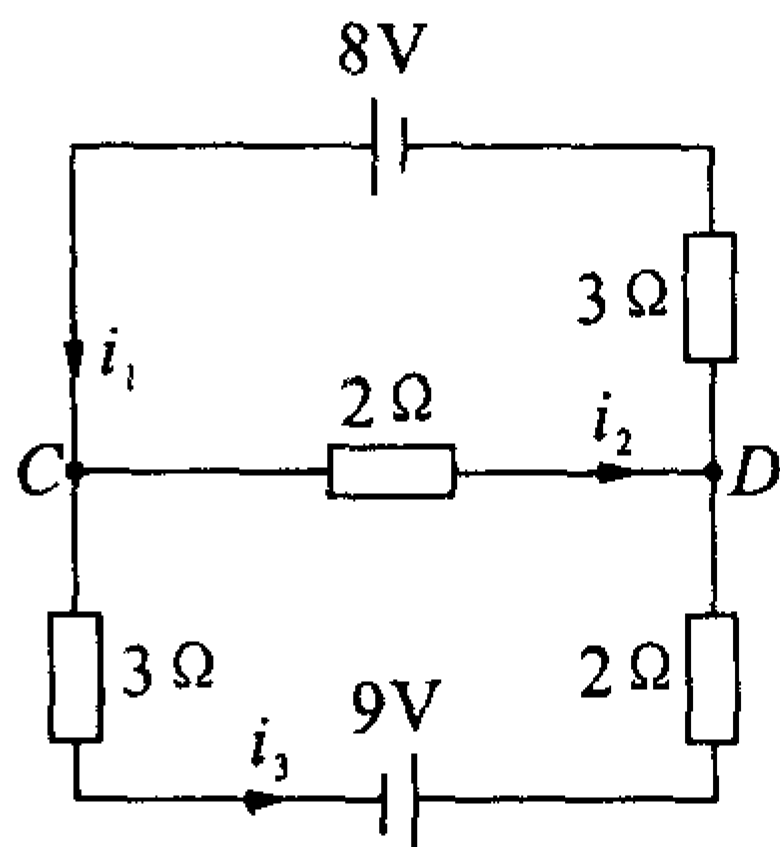


图 3.1

解 根据流入结点的电流之和等于流出的电流之和;每一闭合回路电压的代数和等于电压降的代数和;可得线性方程组:

$$\begin{cases} i_1-\ i_2+\ i_3=0, \\ -i_1+\ i_2-\ i_3=0, \\ 4i_1+2i_2 \qquad =8, \\ \qquad 2i_2+5i_3=9. \end{cases}$$

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\bar{\boldsymbol{A}})=3=n$,故方程组有唯一解

$$i_1=1, \quad i_2=2, \quad i_3=1.$$

例 16 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+k_1x_2+k^2x_3=k^3, \\ x_1-\ kx_2+k^2x_3=-k^2 \end{cases} \quad (k\neq 0 \text{ 为常数})$$

的两个解向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,1)'$和 $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1)'$,求其通解.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 的 2 级子式 $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix}\neq 0$,故秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\bar{\boldsymbol{A}})=2<3$,所以方程组有无穷多解,其导出组基础解系含 $n-r=1$ 个解

向量.

$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,0,2)'$是导出组的解，$\boldsymbol{\eta}\neq\mathbf{0}$，即 $\boldsymbol{\eta}$ 线性无关，故原方程组通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+k\boldsymbol{\eta}=(-1,1,1)'+k(-2,0,2)',\ k \text{ 为任意常数.}$$

例 17 设线性方程组为

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0, \\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1. \end{cases}$$

已知$(1,-1,1,-1)'$是该方程组的一个解，求：

(1) 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解；

(2) 该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解 将解$(1,-1,1,-1)'$代入方程组，得 $\lambda=\mu$. 再对方程组的增广矩阵施行初等行变换，得

$$\bar{\boldsymbol{A}}=\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & \lambda & \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2+\lambda & 4+\lambda & 4 & 1 \end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -2\lambda & 1-\lambda & -\lambda \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(2\lambda-1) & 2\lambda-1 & 2\lambda-1 \end{array}\right]$$

(1)当 $\lambda\neq1/2$ 时

$$\bar{\boldsymbol{A}}\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right],$$

知秩$(\bar{\boldsymbol{A}})=$秩$(\boldsymbol{A})=3<4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\boldsymbol{\xi}=(0,-1/2,1/2,0)'+k(-2,1,-1,2)',k \text{ 为任意常数.}$$

当 $\lambda=1/2$ 时

$$\bar{\boldsymbol{A}}\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

知秩$(\bar{\boldsymbol{A}})=$秩$(\boldsymbol{A})=2<4$，故方程组有无穷多解，全部解为

$$\boldsymbol{\xi}=(-1/2,1,0,0)'+k_1(1,-3,1,0)'+k_2(-1,-2,0,2)'.$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

(2) 当 $\lambda\neq 1/2$ 时,若 $x_2=x_3$,由 $-1/2+k=1/2-k$ 解得 $k=1/2$,故方程组的解为

$$\boldsymbol{\xi}=(0,-1/2,1/2,0)'+\frac{1}{2}(-2,1,-1,2)'=(-1,0,0,1)'.$$

当 $\lambda=1/2$ 时,若 $x_2=x_3$,由 $1-3k_1-2k_2=k_1$ 解得 $k_1=1/4-k_2/2$,故方程组的解为

$$\boldsymbol{\xi}=(-1/4,1/4,1/4,0)'+k_2(-3/2,-1/2,-1/2,2)',$$

其中 k_1 为任意常数.

($\lambda=1/2$ 时,也可解得 $k_2=1/2-2k_1$,则全部解为

$$\boldsymbol{\xi}=(-1,0,0,1)'+k_1(3,1,1,-4)')$$

例 18 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\ \quad\vdots\\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}\quad (a\geqslant 2),$$

a 取何值时,方程组有非零解?求出其通解.

解 对方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作初等行变换,

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ n & n & \cdots & n+a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1+a & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -na & 0 & \cdots & a\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

(1) 当 $a=0$ 时,秩$(\boldsymbol{A})=1<n$,方程组有非零解.

由方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 求得基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,0,\cdots,0)',\quad \boldsymbol{\eta}_2=(-1,0,1,\cdots,0)',\cdots,$$
$$\boldsymbol{\eta}_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)'.$$

所以,方程组通解为

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-1}\boldsymbol{\eta}_{n-1},\ k_1,\cdots,k_{n-1} \text{为任意常数}.$$

(2) 当 $a\neq 0$ 时,对 $\boldsymbol{B}$ 作初等行变换,

$$\boldsymbol{B} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

则当 $a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$ 时，秩$(\boldsymbol{A})=n-1<n$，方程组有非零解，由同解方程组

$$\begin{cases} -2x_1+x_2=0, \\ -3x_1+x_3=0, \\ \quad\vdots \\ -nx_1+x_n=0, \end{cases}$$

得基础解系为 $\boldsymbol{\eta}=(1,2,\cdots,n)'$. 故方程组通解为

$$\boldsymbol{\xi}=k\boldsymbol{\eta}, \quad k \text{ 为任意常数}.$$

例 19 三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行是 (a,b,c). a,b,c 不全为零，矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{bmatrix}, \quad k \text{ 为任意常数}.$$

已知 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 求线性方程组的通解.

解 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知，秩$(\boldsymbol{A})$+秩$(\boldsymbol{B})\leqslant 3$. 又由 a,b,c 不全为零，知秩$(\boldsymbol{A})\geqslant 1$.

当 $k\neq 9$ 时，秩$(\boldsymbol{B})=2$，则秩$(\boldsymbol{A})=1$.

当 $k=9$ 时，秩$(\boldsymbol{B})=1$，则秩$(\boldsymbol{A})=2$ 或秩$(\boldsymbol{A})=1$.

(1) 对 $k\neq 9$，由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可得

$$A\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=O \quad 和\, A\begin{bmatrix}3\\6\\k\end{bmatrix}=O.$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,3)'$，$\boldsymbol{\eta}_2=(3,6,k)'$线性无关，故 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $AX=O$ 的一个基础解系，故方程组通解为

$$\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2, \quad 其中\ c_1,c_2\ 为任意常数.$$

(2) 对 $k=9$，分情形进行讨论.

若秩$(A)=2$，则 $AX=O$ 的基础解系只有一个解向量. 由 $A(1,2,3)'=O$ 知，$AX=O$ 的通解为

$$\boldsymbol{\xi}=c_1(1,2,3)', \quad c_1\ 为任意常数.$$

若秩$(A)=1$，则 $AX=O$ 的基础解系由两个解向量组成. 由于 A 的第 1 行(a,b,c)中 a,b,c 不全为零，故 $AX=O$ 等价于 $ax_1+bx_2+cx_3=0$. 不妨设 $a\neq 0$，则 $\boldsymbol{\eta}_1=(-b,a,0)'$与 $\boldsymbol{\eta}_2=(-c,0,a)'$是 $AX=O$ 的两个线性无关的解，从而得 $AX=O$ 的通解为

$$\boldsymbol{\xi}=c_1\boldsymbol{\eta}_1+c_2\boldsymbol{\eta}_2, \quad c_1,c_2\ 为任意常数.$$

例 20 设齐次线性方程组

$$\text{I}:\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0,\\ 2x_1+3x_2+5x_3=0,\\ x_1+\ x_2+ax_3=0;\end{cases}$$

$$\text{II}:\begin{cases} x_1+\ bx_2+\qquad cx_3=0,\\ 2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0\end{cases}$$

同解. 求 a,b,c 的值.

解 方程组Ⅱ的未知量个数大于方程个数，故有无穷多个解，从而方程组Ⅰ也有无穷多个解，故Ⅰ系数矩阵的秩小于 3.

对Ⅰ系数矩阵施行初等行变换

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix},$$

由秩小于 3 知，$a=2$. 于是

$$\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{bmatrix},$$

得Ⅰ的一个基础解系为$(-1,-1,1)'$.将$x_1=-1,x_2=-1,x_3=1$代入Ⅱ得$b=1,c=2$或$b=0,c=1$.

当$b=1,c=2$时,对Ⅱ系数矩阵施行初等行变换

$$\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

故Ⅰ与Ⅱ同解.

当$b=0,c=1$时,由$\begin{bmatrix}1&0&2\\2&0&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$知,Ⅰ与Ⅱ不同解.

故当$a=2,b=1,c=2$时Ⅰ与Ⅱ同解.

*第五节　二元高次方程组

主要内容

1.引理　设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$是数域$P$上的两个非零多项式,它们的系数$a_0$,$b_0$不全为零.$f(x)$与$g(x)$在$P[x]$上有非常数的公因式的充分必要条件是,在$P[x]$中存在非零的次数小于$m$的多项式$u(x)$与次数小于$n$的多项式$v(x)$,使

$$u(x)f(x)=v(x)g(x).$$

定理1　设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$与$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m$是$P[x]$中两个多项式,$m,n>0$,于是它们的结式$R(f,g)=0$的充分必要条件是$f(x)$与$g(x)$在$P[x]$中有非常数的公因式或它们的第一个系数$a_0,b_0$全为零.行列式

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

称为多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的**结式**，记为 $R(f,g)$.

2. 定理 2 若 (x_0,y_0) 是方程组 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ 的一个复数解，则 y_0 是 $R_x(f,g)$ 的一个根；反之，若 y_0 是 $R_x(f,g)$ 的一个复根，则 $a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$，或者存在一个复数 x_0，使 (x_0,y_0) 是方程组 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ 的一个解.

疑 难 解 析

怎样利用结式讨论两个二元多项式的公共零点问题？

答 设 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 是两个复系数二元多项式，按 x 的降幂重新写出两个多项式

$$f(x,y)=a_0(y)x^n+a_1(y)x^{n-1}+\cdots+a_n(y),$$

$$g(x,y)=b_0(y)x^m+b_1(y)x^{m-1}+\cdots+b_m(y).$$

式中 $a_i(y)$ 和 $b_j(y)$ 分别看成 f 中 x^{n-i} 和 g 中 x^{m-j} 的系数 $(i=0,1,\cdots,n;j=0,1,\cdots,m)$. 求出 f 与 g 的结式，记为 $R_x(f,g)$. $R_x(f,g)$ 是 y 的一个多项式，即 $R_x(f,g)=\varphi(y)$.

若 $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 有公共零点 $x=\alpha,y=\beta$，则以 β 代替多项式中 y 后所得一元多项式 $f(x,\beta)$ 与 $g(x,\beta)$ 应有公共根 α，此时结式 $\varphi(y)=0$；反之，若 $R_x(f,g)$ 有根 β，则 $f(x,\beta)$ 与 $g(x,\beta)$

的结式$\varphi(\beta)=0$，则 $a_0(\beta)=b_0(\beta)=0$ 或者 $f(x,\beta)$与 $g(x,\beta)$有公共根.

这样，求 $f(x,y)=0$ 和 $g(x,y)=0$ 的公共解可以归结为求 $\varphi(y)=0$ 的根. 即可以从两个方程中消去一个未知量，所以又称未知量的消去法.

方法、技巧与典型例题分析

认真辨析结式的概念，学会利用结式求两个二元多项式的公共解，熟悉解题的方法与步骤.

例 1 多项式 $f(x)=2x^3-3x^2+\lambda x+2$ 与 $g(x)=x^4+\lambda x^2-3x-1$ 在 λ 取何值时有公共根.

解 因为 $f(x)$与 $g(x)$的结式

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} 2 & -3 & \lambda & 2 & & & \\ & 2 & -3 & \lambda & 2 & & \\ & & 2 & -3 & \lambda & 2 & \\ & & & 2 & -3 & \lambda & 2 \\ 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & & \\ & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 & \\ & & 1 & 0 & \lambda & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+3)(-\lambda^3+4\lambda^2+28\lambda+157).$$

当 $\lambda=-3$ 时，$R(f,g)=0$，$f(x)$与 $g(x)$有公共根. 同时，对 $\lambda^3-4\lambda^2-28\lambda-157=0$ 的任一根，$f(x)$与 $g(x)$有公共根.

例 2 解联立方程：

(1) $\begin{cases} 5y^2-6xy+5x^2-16=0, \\ y^2-xy+2x^2-y-x-4=0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2+4x-2y+3=0, \\ x^2+4xy-y^2+10y-9=0. \end{cases}$

解 (1) $\begin{cases} f(x,y)=5y^2-6xy+5x^2-16=0, \\ g(x,y)=y^2-(x+1)y+2x^2-x-4=0. \end{cases}$

$$R_y(f,g)=\begin{vmatrix} 5 & -6x & 5x^2-16 & \\ & 5 & -6x & 5x^2-16 \\ 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 & \\ & 1 & -x-1 & 2x^2-x-4 \end{vmatrix}$$

$$=32(x-1)^2(x+1)(x-2).$$

当 $x=1,-1,2$ 时，$R_y(f,g)=0$. 代入原方程得

① $x=1$ 时，$\begin{cases} 5y^2-6y-11=0, \\ y^2-2y-3=0, \end{cases}$ 解得 $y=-1$.

② $x=-1$ 时，$\begin{cases} 5y^2+6y-11=0, \\ y^2-1=0, \end{cases}$ 解得 $y=1$.

③ $x=2$ 时，$\begin{cases} 5y^2-12y+4=0, \\ y^2-3y+2=0, \end{cases}$ 解得 $y=2$.

故原方程组有三组解.

结式用 $R_x(f,g)$ 或 $R_y(f,g)$，结果是一样的. 选择哪个形式，看怎样方便，怎样计算简单.

(2) 同题(1)的步骤，求得结式

$$R_y(f,g)=4(x+1)(x+3)\left(x+\frac{10+3\sqrt{5}}{5}\right)\left(x+\frac{10-3\sqrt{5}}{5}\right).$$

原方程组有四组解

$$\begin{cases} x_1=-1, \\ y_1=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=-3, \\ y_2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-\dfrac{10+3\sqrt{5}}{5}, \\ y_3=\dfrac{5-\sqrt{5}}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-\dfrac{10-3\sqrt{5}}{5}, \\ y_4=\dfrac{5+\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

例 3 求下列曲线的直角坐标方程：

(1) $x=t^2-t+1, \quad y=2t^2+t-3$;

(2) $x=\dfrac{2t+1}{t^2+1}, \quad y=\dfrac{t^2+2t-1}{t^2+1}$.

解 将方程的一端移到另一端就得到两个二元多项式，消去一个变量 t，写出结式 $R_t(f,g)$ 即可.

(1) 建立方程组

$$\begin{cases} f=t^2-t+(1-x)=0, \\ g=2t^2+t-(3+y)=0. \end{cases}$$

写出结式

$$R_t(f,g)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1-x \\ 2 & 1 & -3-y & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3-y \end{vmatrix}$$

$$=4x^2-4xy+y^2-23x+7y+19.$$

故曲线的直角坐标方程为

$$4x^2-4xy+y^2-23x+7y+19=0.$$

(2) 建立方程组

$$\begin{cases} f=xt^2-2t+(x-1)=0, \\ g=(y-1)t^2-2t+(y+1)=0, \end{cases}$$

写出结式

$$R_t(f,g)=\begin{vmatrix} x & -2 & x-1 & \\ & x & -2 & x-1 \\ y-1 & -2 & y+1 & \\ & y-1 & -2 & y+1 \end{vmatrix}$$

$$=8x^2-4xy+5y^2-8x+2y-7.$$

故曲线的直角坐标方程为

$$8x^2-4xy+5y^2-8x+2y-7=0.$$

例 4 求下列结式：

(1) $\dfrac{x^5-1}{x-1}$与$\dfrac{x^7-1}{x-1}$；

(2) x^n+x-1 与 x^2-3x+2；

(3) x^n+1 与$(x-1)^n$.

解 (1) $\begin{cases} f=\dfrac{x^5-1}{x-1}=x^4+x^3+x^2+x+1, \\ g=\dfrac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1. \end{cases}$

写出结式(f 占 6 行,g 占 4 行),计算得

$$R(f,g)=1.$$

(2) $\begin{cases} f=x^n+x-1, \\ g=x^2-3x+2. \end{cases}$

写出结式(f 占 2 行,g 占 n 行),计算得

$$R=(f,g)=3(2^n+3).$$

(3) 用数学归纳法证明 $R(f_n,g_n)=2^n$.

$n=1$ 时, $$R(f_1,g_1)=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2.$$

设 $n-1$ 时,$R(f_{n-1},g_{n-1})=2^{n-1}$ 成立.

$R(f_n,g_n)$(f_n 与 g_n 各占 n 行)$=2R(f_{n-1},g_{n-1})=2^n$.

复数域 $\mathbf{C}$ 上的 n 次多项式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

的全部根为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\in\mathbf{C}$,则乘积

$$D=a_0^{2n-2}\prod_{i>j}(\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_j)^2$$

称为多项式 $f(x)$ 的判别式. 多项式 $f(x)$ 有重根的充分必要条件是 $D=0$.

例 5 求 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的判别式.

解 因为 $f'(x)=2ax+b$,所以

$$R(f,f')=-a(b^2-4ac).$$

于是 $$D=(-1)\frac{2\times1}{2}\frac{1}{a}R(f,f')=b^2-4ac.$$

例 6 当 k 取何值时,多项式 $f(x)=x^4-4x+k$ 有重根?

解 因为 $f'(x)=4x^3-4$,所以,由

$$R(f,f')=4^4(k^8-27)=0\Longrightarrow k=3,3\varepsilon,3\varepsilon^2,$$

其中 $\varepsilon=-1+\sqrt{3}\mathrm{i}$. k 取 ε,3ε,$3\varepsilon^2$ 时,$f(x)$ 有重根.

第四章 矩　　阵

矩阵是高等代数(特别是线性代数)的重要研究对象,通过本章要熟悉矩阵的运算和它们的一些基本性质.

第一节 矩阵的运算

主 要 内 容

1. 定义 1 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{sn}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{sn}$ 是两个 $s\times n$ 矩阵,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和为

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{ns}=(a_{ij})_{ns}+(b_{ij})_{ns}.$$

结合律　　$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}.$

交换律　　$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O},\quad \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B}).$$

$$秩(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant 秩(\boldsymbol{A})+秩(\boldsymbol{B}).$$

2. 定义 2 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{sn}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{nm}$ 的**乘积**为矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{sm}=\boldsymbol{AB}$,式中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}.$$

仅当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时两个矩阵才能相乘.

结合律　　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}.$

分配律　　$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC},(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}.$

矩阵乘法一般不满足交换律,即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$;不满足消去律,即 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}\not\Rightarrow\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}.$

3. **定义 3** $E_n=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix}$称为 n 级单位矩阵.

$$AE_n=A,\quad E_nB=B.$$

4. **定义 4** kA 称为矩阵 A 与数 k 的**数量乘积**,即用数 k 乘矩阵 A 的每一个元素.

$$(k+l)A=kA+lA,\quad k(A+B)=kA+kB,$$

$$k(lA)=(kl)A,\quad 1A=A,\quad k(AB)=(kA)B=A(kB).$$

$kE=\begin{bmatrix}k & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k\end{bmatrix}$称为**数量矩阵**,且有

$$kA=(kE)A=A(kE).$$

5. **定义 5** $A=(a_{ij})_{sn}$的转置是$A'=(a_{ji})_{ns}$.

$$(A')'=A,(A+B)'=A'+B',(AB)'=B'A',(kA)'=kA'.$$

疑难解析

为什么双重求和符号可以交换次序?

答 在证明矩阵乘法性质时常用到这一性质.因为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j &= \sum_{i=1}^{s}a_i\Big(\sum_{j=1}^{n}b_j\Big)\\ &= a_1b_1+a_1b_2+\cdots+a_1b_n+a_2b_1+a_2b_2+\cdots+a_2b_n\\ &\quad+\cdots+a_sb_1+a_sb_2+\cdots+a_sb_n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}a_ib_j &= \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{s}a_i\Big)b_j\\ &= a_1b_1+a_2b_1+\cdots+a_sb_1+a_1b_2+a_2b_2+\cdots+a_sb_2\\ &\quad+\cdots+a_1b_n+a_2b_n+\cdots+a_sb_n,\end{aligned}$$

所以 $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{s}a_ib_j$,即双重求和符号可以交换次序.

方法、技巧与典型例题分析

矩阵的基本运算是必须熟练掌握的，对运算的条件与规则应该十分熟悉.

例 1 对下列矩阵，计算 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$；

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ c & b & a\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & a & c\\ 1 & b & b\\ 1 & c & a\end{bmatrix}$.

解 (1) $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}6 & 2 & -2\\ 6 & 1 & 0\\ 8 & -1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}6 & 2 & -2\\ 6 & 1 & 0\\ 8 & -1 & 2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 0 & 0\\ 4 & -4 & -2\end{bmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac\\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2\\ 3 & a+b+c & a+b+c\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}ac+a+c & ab+b+c & a^2+2c\\ bc+a+b & b^2+2b & ab+b+c\\ c^2+2a & bc+a+b & ac+a+c\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}b-ac & a^2+b^2+c^2-ab-b-c & b^2+2ac-a^2-ac\\ c-bc & 2ac-2b & a^2+b^2+c^2-ab-b-c\\ 3-c^2-2a & c-bc & b-ab\end{bmatrix}.$$

例 2 计算下列矩阵：

对含有 n 的习题，一般先计算 $n=2,3$ 时的结果，从中得出计算规律，提出归纳假设，然后再用数学归纳法证明.

(1) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^2$； (2) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & -2\end{bmatrix}^5$； (3) $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n$；

(4) $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^n$； (5) $(2,3,-1)\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}(2,3,-1)$；

(6) $(x,y,1)\begin{bmatrix}a_{11} & b_{12} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$； (7) $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$；

(8) $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^2$，$\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^n$.

解 (1) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4 & 4\\ 9 & 4 & 3\\ 3 & 3 & 4\end{bmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 2\end{bmatrix}^5=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 4 & 8\end{bmatrix}$；

(3) 用数学归纳法证明

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$n=1$ 时显然正确. 设 $n-1$ 时，

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{n-1}=\begin{bmatrix}1 & n-1\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

则 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & n-1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

对含有 n 的习题，一般先计算 $n=2,3$ 时的结果，从中得出计算规律，提出归纳假设，然后再用数学归纳法证明.

(4) 用数学归纳法证明$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{bmatrix}$.

当 $n=2$ 时，

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos^2\varphi-\sin^2\varphi & -2\cos\varphi\sin\varphi\\ 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi-\sin\varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos2\varphi & -\sin2\varphi\\ \sin2\varphi & \cos2\varphi\end{bmatrix}.$$

设 $n-1$ 时，

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^{n-1}=\begin{bmatrix}\cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi\\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi\end{bmatrix},$$

则

$$\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(n-1)\varphi & -\sin(n-1)\varphi\\ \sin(n-1)\varphi & \cos(n-1)\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{bmatrix}.$$

(5) $(2,3,-1)\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}=0$,

$$\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}(2,3,-1)=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & -3 & 1\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

(6) $(x,y,1)\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{12} & a_{22} & b_2\\ b_1 & b_2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$

$$=(a_{11}x+a_{12}y+b_1,a_{12}x+a_{22}y+b_2,b_1x+b_2y+c)\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}$$

$$=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c.$$

(7) 用数学归纳法证明

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}.$$

当 $n=2$ 时，

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2 & 2\lambda & 1\\0 & \lambda^2 & 2\lambda\\0 & 0 & \lambda^2\end{bmatrix}$$

设 $n-1$ 时，

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^{n-1}=\begin{bmatrix}\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} & \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}\\0 & \lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2}\\0 & 0 & \lambda^{n-1}\end{bmatrix},$$

则

$$\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\0 & \lambda & 1\\0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}.$$

(8) $$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & -1\\-1 & 1 & -1 & -1\\-1 & -1 & 1 & -1\\-1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & & & \\ & 4 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4\end{bmatrix}=4\boldsymbol{E}_4,$$ 则

当 $n=2k$ 时，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{2k}=(4\boldsymbol{E})^k=2^{2k}\boldsymbol{E}^k=2^n\boldsymbol{E}$；

当 $n=2k+1$ 时，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{2k+1}=(\boldsymbol{A}^2)^k\boldsymbol{A}=2^n\boldsymbol{E}\boldsymbol{A}=2^n\boldsymbol{A}$.

例 3 设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$，$\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，定义 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{A}^m+a_1\boldsymbol{A}^{m-1}+\cdots+a_m\boldsymbol{E}$，试求 $f(\boldsymbol{A})$.

(1) $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}$；

(2) $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1\\-3&3\end{bmatrix}$.

解 (1) $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}8&2&4\\11&2&5\\-1&0&-1\end{bmatrix}$，故

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-1$$

$$=\begin{bmatrix}8&2&4\\11&2&5\\-1&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&1&3\\8&0&3\\-2&1&--2\end{bmatrix}.$$

(2) $\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}7&-5\\-15&12\end{bmatrix}$，$5\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10&-5\\-15&15\end{bmatrix}$，故

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}$$

$$=\begin{bmatrix}7&-5\\-15&12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10&-5\\-15&15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

例 4 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换. 设

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$；　　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\3&1&2\end{bmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}_1$，利用 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}\Rightarrow\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BA}_1$ 解出 $\boldsymbol{B}$ 的元素，求得 $\boldsymbol{B}$.

(1) 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$,设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{A}$ 可交换.

因 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则由

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

得 $c=0,a=d$,故所有 $\boldsymbol{B}$ 的形式为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & b\\0 & a\end{bmatrix}$.

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}$,设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & b & c\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{A}$ 可交换.

由

$$\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}_1\Longrightarrow\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 2\\3 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

得 $a=b_1-\dfrac{a_1}{3}$, $b=0$, $c=0$, $a_2=\dfrac{3}{2}c_1$, $b_2=\dfrac{c_1}{2}$, $c_2=b_1+\dfrac{c_1}{2}$.

故所有 $\boldsymbol{B}$ 的形式为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_1-\dfrac{a_1}{3} & 0 & 0\\a_1 & b_1 & c_1\\\dfrac{3}{2}c_1 & \dfrac{1}{2}c_1 & b_1+\dfrac{1}{2}c_1\end{bmatrix}.$$

(3) 设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a & b & c\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}$与 $\boldsymbol{A}$ 可交换. 由

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\a_1 & b_1 & c_1\\a_2 & b_2 & c_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得 $a_1=a_2=b_2=0$, $b_1=a$, $c_2=a$, $c_1=b$.

故所有 $\boldsymbol{B}$ 的形式为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，其中 $a_i \neq a_j$，当 $i \neq j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 证明：与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

证 显然任何对角矩阵与 $\boldsymbol{A}$ 都可交换.

再设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 可交换，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，得

$$\begin{bmatrix} a_1 b_{11} & a_1 b_{12} & \cdots & a_1 b_{1n} \\ a_2 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_2 b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n b_{n1} & a_n b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 b_{11} & a_2 b_{12} & \cdots & a_n b_{1n} \\ a_1 b_{21} & a_2 b_{22} & \cdots & a_n b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 b_{n1} & a_2 b_{n2} & \cdots & a_n b_{nn} \end{bmatrix},$$

因此 $(a_i-a_j)b_{ij}=0(i \neq j)$，因 $a_i \neq a_j, i \neq j$ 时，从而 $b_{ij}=0$，故 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵.

综上所述知，与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

例 6 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示 i 行 j 列元素为 1，而其余元素全为零的 $n \times n$ 矩阵，而 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，证明：

(1) 若 $\boldsymbol{AE}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$，则当 $k \neq 1$ 时 $a_{k1}=0$，当 $k \neq 2$ 时 $a_{2k}=0$；

(2) 若 $\boldsymbol{AE}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$，则当 $k \neq i$ 时 $a_{ki}=0$，当 $k \neq j$ 时 $a_{jk}=0$，且 $a_{ii}=a_{jj}$；

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 与所有的 n 级矩阵可交换，则 $\boldsymbol{A}$ 一定是数量矩阵，即 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{E}$.

证 (1) 由 $\boldsymbol{AE}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{A}$，得

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

所以，$k\neq 1$ 时，$a_{k1}=0$；$k\neq 2$ 时，$a_{2k}=0$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{A}$，得

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_i & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2i} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ni} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = i\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

所以，$k\neq i$ 时，$a_{ki}=0$；$k\neq j$ 时，$a_{jk}=0$，且 $a_{ii}=a_{jj}$.

(3) 数量矩阵 $k\boldsymbol{E}$ 与任意 n 级矩阵可交换是显然的.

反之，若 $\boldsymbol{A}$ 与任意 n 级矩阵可交换，则必与 $k\boldsymbol{E}$ 可交换，则由题(2)知，$\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵.

例 7 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$. 证明：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$；$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}$.

证 因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$，所以

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}.$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CA})=(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{A}.$$

例 8 若 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$，证明：$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$.

证 因为 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$，所以 $\boldsymbol{A}^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$.

若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，即 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=\frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$，从而得 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$.

反之，若 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，则由 $\boldsymbol{A}^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2+2\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$ 知，$\boldsymbol{A}^2=$

$\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})=\boldsymbol{A}.$

例 9 若 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称的.证明:若 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}',$$

则由

$$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}^2+a_{12}^2+\cdots+a_{1n}^2 & & & \\ & a_{21}^2+a_{22}^2+\cdots+a_{2n}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n1}^2+a_{n2}^2+\cdots+a_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{O},$$

得 $a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$,即 $a_{ij}=0$,从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例 10 若 $\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}$,则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是反对称的.证明:任一 $n\times n$ 矩阵都可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和.

证 设 $\boldsymbol{B}$ 为任一 n 阶方阵,作

$$\boldsymbol{B}_1=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}'), \quad \boldsymbol{B}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}'),$$

则 $$\boldsymbol{B}_1'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}')'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}'+(\boldsymbol{B}')')=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}'+\boldsymbol{B}),$$

$$\boldsymbol{B}_2'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}')'=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}'-(\boldsymbol{B}')')=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}'-\boldsymbol{B})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}'),$$

所以,$\boldsymbol{B}_1$ 是对称矩阵,$\boldsymbol{B}_2$ 是反对称矩阵.

$$B=B_1+B_2=\frac{1}{2}(B+B')+\frac{1}{2}(B-B'),$$

即 B 可表示为一对称矩阵与一反对称矩阵之和，且表示法唯一.

例 11 设 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\quad(k=0,1,\cdots)$，$a_{ij}=s_{i+j-2}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 证明：$|a_{ij}|=\prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)^2$.

证 因为

$$|a_{ij}|=|s_{i+j-2}|=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} n & x_1+\cdots+x_n & \cdots & x_1^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1} \\ x_1+\cdots+x_n & x_1^2+\cdots+x_n^2 & \cdots & x_1^n+\cdots+x_n^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1} & x_1^n+\cdots+x_n^n & \cdots & x_1^{2n-1}+\cdots+x_n^{2n-1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}\text{（由范德蒙行列式）}$$

$$=\prod_{i<j}(x_j-x_i)\prod_{i<j}(x_j-x_i)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2.$$

例 12 若 A,B 都是 $n\times n$ 的对称矩阵，证明：AB 也对称当且仅当 A,B 可交换.

证 因为 $A=A'$,$B=B'$，所以

若 AB 对称，则 $AB=(AB)'=B'A'=BA$，即 AB 可交换.

若 A,B 可交换，即 $AB=BA$，则 $AB=BA=B'A'=(AB)'$，从而 AB 对称.

例 13 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，证明：存在一个 $n\times n$ 的非零矩阵 B，使 $AB=O$ 的充分必要条件是 $|A|=0$.

证 必要性 设 $B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，其中 b_j 是 B 的第 j 列

(列向量). 由 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$,故必有 i_0,使 $\boldsymbol{b}_{i_0}\neq\mathbf{0}$. 又因为 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=\boldsymbol{O}$,从而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{O}$,即方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解,则 $|\boldsymbol{A}|=0$.

充分性 若 $|\boldsymbol{A}|=0$,则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 有非零解 $\boldsymbol{b}_1$. 作 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\neq\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{B}$ 中 $\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n$ 均为零向量,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{O}$ $(j=1,2,\cdots,n)$,于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$.

例 14 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 矩阵,若对任一 n 维向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,都有 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证 因为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{O}$ 的基础解系含 n 个线性无关的解向量,故秩$(\boldsymbol{A})=0$,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例 15 设 $\boldsymbol{B}$ 为一 $r\times r$ 矩阵,C 为一 $r\times n$ 矩阵,且秩$(\boldsymbol{C})=r$,证明:

(1) 若 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$; (2) 若 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

证 (1) 因为秩$(\boldsymbol{C})=r$,所以 $\boldsymbol{C}$ 中至少有一 r 阶子式不为零,(不妨设 $\boldsymbol{C}$ 的左上角 r 阶子式为 $\boldsymbol{C}_1$,$|\boldsymbol{C}_1|\neq0$),则 $\boldsymbol{BC}_1=\boldsymbol{O}$,依例 13 知,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

(2) 由 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{C}\Longrightarrow(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$,由(1)得 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,即$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$.

例 16 证明:秩$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant$秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})$.

证 证明要利用向量组的极大无关组概念.

记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$, $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,

则
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n).$$

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 列向量组的极大无关组,则

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i_{r_1}}\boldsymbol{\alpha}_{r_1},\quad \boldsymbol{\beta}_i=l_{i_1}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_{i_{r_2}}\boldsymbol{\beta}_{r_2},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{\beta}_i=k_{i_1}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i_{r_i}}\boldsymbol{\alpha}_{r_1}+l_{i_1}\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_{i_{r_2}}\boldsymbol{\beta}_{r_2}$,即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{r_1},\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{r_2}$ 线性表示. 故

$$秩(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant秩(\boldsymbol{A})+秩(\boldsymbol{B}).$$

例 17 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 $n\times n$ 矩阵,证明:若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

证 记 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得 $\boldsymbol{Ab}_i=\boldsymbol{O}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故知 $\boldsymbol{b}_i$ 是齐次线性方程组的解向量. 所以

$$\text{秩}(\boldsymbol{B})\leqslant n-\text{秩}(\boldsymbol{A})\Longrightarrow\text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{B})\leqslant n.$$

例 18 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为 n 阶方阵，而 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})$，这里 $\overline{a}_{ij}$ 是 a_{ij} 的共轭数. 证明：如果 $\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证 由于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$， $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a}_{ij})$，故

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'=\begin{bmatrix}\sum a_{1j}\overline{a}_{1j} & & & \\ & \sum a_{2j}\overline{a}_{2j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum a_{nj}\overline{a}_{nj}\end{bmatrix}=\boldsymbol{O},$$

从而 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\overline{a}_{ij}=\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2=0$ $(j=1,2,\cdots,n)$，于是 $a_{ij}=0$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例 19 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为**对合矩阵**. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是对合矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 也是对合矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

证 设 $\boldsymbol{AB}$ 为对合矩阵，则有 $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{E}$，故

$$\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{AB})^2=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}.$$

对上式两端左乘 $\boldsymbol{A}$，右乘 $\boldsymbol{B}$，由于 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}$，故

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^2\Longrightarrow\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}.$$

反之，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 对等式两端右乘 $\boldsymbol{AB}$，得

$$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{BAAB}=\boldsymbol{BEB}=\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E},$$

所以，$\boldsymbol{AB}$ 为对合矩阵.

例 20 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶方阵，秩$(\boldsymbol{A})=1$，证明：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$；　　(2) $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}$.

证 (1) 由于秩$(\boldsymbol{A})=1$，故必有 $\boldsymbol{A}$ 的某元素 $a_{i_0j_0}\neq0$，且 $\boldsymbol{A}$ 的

任意两列都成比例，若记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则有 $\boldsymbol{\alpha}_i=b_i\boldsymbol{\beta}_1$，其中 $\boldsymbol{\beta}_1=(a_1,\cdots,a_n)'$ 为非零列向量，于是

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=(b_1\boldsymbol{\beta}_1,b_2\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,b_n\boldsymbol{\beta}_1)$$

$$=\begin{bmatrix} b_1a_1 & b_2a_1 & \cdots & b_na_1 \\ b_1a_2 & b_2a_2 & \cdots & b_na_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1a_n & b_2a_n & \cdots & b_na_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n).$$

(2) 由题(1)知

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$

$$=k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=k\boldsymbol{A},$$

式中数 $k=(b_1,b_2,\cdots,b_n)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}=\sum\limits_{i=1}^{n}b_ia_i$.

例 21 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2×2 矩阵，证明：若 $\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{O}$，$l\geqslant 2$，则 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$.

证 由于 $\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{O}$，则有 $0=|\boldsymbol{A}^l|=|\boldsymbol{A}|^l$，即 $|\boldsymbol{A}|=0$，因而秩$(\boldsymbol{A})=1$ 或 0，故可利用例 20 结果，有 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}[b_1,b_2]$. 从而

$$\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{A}^l=k^{l-1}\boldsymbol{A}\quad (l\geqslant 2).$$

因为 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则由 $\boldsymbol{A}^l=k^{l-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}\Longrightarrow k=0$，所以 $\boldsymbol{A}^2=k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例 22 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 矩阵，证明：如果 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$（对合矩阵），则

$$\text{秩}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})+\text{秩}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=n.$$

证 因为 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，所以

$$O=A^2-E=(A+E)(A-E).$$

则由例 17 知，秩$(A+E)$＋秩$(A-E)\leqslant n$. 又 $2E=(A+E)+(A-E)$，则由例 16 知

$$n=\text{秩}(2E)=\text{秩}[(A+E)+(E-A)]$$
$$\leqslant\text{秩}(A+E)+\text{秩}(A-E).$$

综上可知 秩$(A+E)$＋秩$(A-E)=n$.

例 23 设 A 为 n 阶方阵，且 $A^2=A$（**幂等矩阵**）. 证明：

$$\text{秩}(A)+\text{秩}(A-E)=n.$$

证 因为 $A^2=A$，所以 $A^2-A=(A-E)A=O$，则由例 17 得，秩(A)＋秩$(A-E)\leqslant n$. 又由例 16 得

$$n=\text{秩}(E)=\text{秩}[(E-A)+A]$$
$$\leqslant\text{秩}(E-A)+\text{秩}(A)=\text{秩}(A-E)+\text{秩}(A).$$

综上可知 秩(A)＋秩$(A-E)=n$.

例 24 设 A,B 都是幂等矩阵，证明：$A+B$ 是幂等矩阵的充分必要条件是 $AB=BA=O$.

证 因为 $A^2=A$，$B^2=B$，所以有

$$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2=A+B+(AB+BA). \quad ①$$

若 $AB=BA=O$，则 $(A+B)^2=A+B$，即 $A+B$ 为幂等矩阵.

反之，若 $(A+B)^2=A+B$，则由式①得 $AB+BA=O$，即 $AB=-BA$. 由此得出

$$AB=A^2B=A(AB)=A(-BA)$$
$$=-(AB)A=-(-BA)A=BA^2=BA.$$

比较 $AB=-BA$ 与 $AB=BA$ 知，$AB=BA=O$.

第二节 矩阵乘积的行列式与秩 矩阵的逆与矩阵的分块

主 要 内 容

1. **定理 1** 设 A,B 是数域 P 上的两个 $n\times n$ 矩阵，则 $|AB|=|A||B|$，即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积.

推论 1 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵，于是

$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|$.

定义 1 若$|A|\neq 0$,则数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵称为**非退化的**;否则,称为**退化的(或降秩的)**.

推论 2 设 A,B 是数域 P 上 $n\times n$ 矩阵,矩阵 AB 为退化的充分必要条件是 A,B 中至少有一个是退化的.

2. 定理 2 设 A 是数域 P 上 $n\times m$ 矩阵,B 是数域上 $m\times s$ 矩阵,则

$$秩(AB)\leqslant \min[秩(A),秩(B)],$$

即乘积的秩不超过各因子的秩.

推论 3 若 $A=A_1A_2\cdots A_t$,则秩$(A)\leqslant \min\limits_{1\leqslant j\leqslant t}[秩(A_j)]$.

3. 定义 2 若有 n 阶方阵 B,使得 $AB=BA=E$,则称 n 阶方阵 A **是可逆的**.

若矩阵 B 适合 $AB=BA=E$,则称 B 为 A 的**逆矩阵**,记为 A^{-1}.

4. 定义 3 设 A_{ij} 是 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$的代数余子式,则矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

称为 A 的**伴随矩阵**.

5. 定理 3 矩阵 A 可逆的充分必要条件是 A 非退化,而

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^* \quad (|A|\neq 0).$$

对于 n 阶方阵 A,B,若 $AB=E$,则 A,B 均可逆且互为逆矩阵.

推论 4 若矩阵 A,B 可逆,则 A'与 AB 也可逆,且 $(A')^{-1}=(A^{-1})'$,$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

6. 定理 4 设 A 是一个 $s\times n$ 矩阵,P 是 $s\times s$ 可逆矩阵,Q 是 $n\times n$ 可逆矩阵,则

$$秩(A)=秩(PA)=秩(AQ)$$

7 . 设 $D=\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$,式中 A 是 k 阶可逆阵,B 是 r 阶可逆阵,C 是 $r\times k$ 矩阵,O 是 $k\times r$ 矩阵,则

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}.$$

若 $D=\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$,则 $D^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$.

疑 难 解 析

1. 用伴随矩阵求逆矩阵应注意哪些问题?

答 因为 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$,所以,必须 $|A|\neq 0$. 又因为 $A^*=(A_{ji})$,所以当 n 较大时,A_{ij} 的计算量较大. 从而,一般仅当 $n\leqslant 4$ 时才使用伴随矩阵法求逆矩阵.

2. 怎样求解矩阵方程?

答 含有未知矩阵的方程称为矩阵方程. 常见的线性矩阵方程有以下三种基本形式

$$AX=C,\quad XB=C,\quad A\times B=C.$$

当 A,B 都为方阵且都可逆时,三种方程的解为

$$X=A^{-1}C,\quad X=CB^{-1},\quad X=A^{-1}CB^{-1}.$$

解矩阵方程时,要注意以下几点:

(1) 矩阵乘法不存在交换律,因此不可随便更换相乘次序;

(2) 矩阵乘法不存在消去律,因此不可随便约去相同因式;

(3) 若矩阵方程不符合上述形式时,要先用恒等变换化为上述形式.

3. 对矩阵的加法和乘法的分块运算要注意哪些问题?

答 因为只有同型矩阵才能求和,所以在对加法进行分块运算时,必须对两个矩阵的行和列施行相同的分法.

因为仅当左矩阵的列数等于右矩阵的行数时,两矩阵才能相

乘，所以在对矩阵乘法进行分块运算时，必须使左矩阵列的分法与右矩阵行的分法一致.

方法、技巧与典型例题分析

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$，有以下运算规律：

$$\det(k\boldsymbol{A})=k^n\boldsymbol{A},\quad \det(\boldsymbol{AB})=\det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B},$$

$$\det(\boldsymbol{A}^k)=(\det\boldsymbol{A})^k,\quad \det(\boldsymbol{A}^{-1})=(\det\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}\text{ 可逆}).$$

例 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶方阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\det\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}$，求 $\det\left[\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-10\boldsymbol{A}^*\right]$.

解
$$\begin{aligned}\det\left[\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-10\boldsymbol{A}^*\right]&=\det[3\boldsymbol{A}^{-1}-10(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}]\\&=\det(3\boldsymbol{A}^{-1}-5\boldsymbol{A}^{-1})\\&=-8\det(\boldsymbol{A}^{-1})=-16.\end{aligned}$$

（因为 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{E}$，所以 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{-1}|=1$，$|\boldsymbol{A}^{-1}|=1/|\boldsymbol{A}|$）

例 2 计算行列式 $\begin{vmatrix}1+x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n\\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & x_2y_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n\end{vmatrix}$.

解
$$\det\boldsymbol{A}=\det\left[\boldsymbol{E}_n+\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}(y_1,y_2,\cdots,y_n)\right]$$

$$=1+(y_1,y_2,\cdots,y_n)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=1+\sum_{k=1}^{n}x_ky_k.$$

若将行列式中 1 换作 a，则 $\det\boldsymbol{A}=a^n\left(1+\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)$.

例 3 $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{bmatrix}$，求 $\det AA'$.

解 $\det A=(b-a)(c-a)(c-b)$，

$\det AA'=\det A\cdot\det A'=(b-a)^2(c-a)^2(c-b)^2$.

例 4 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\1&3&0\end{bmatrix}$，求 AA^*，$|AA^*|$，$|A^*|$.

解 因为 $|A|=5$，$AA^*=|A|E=5E$，所以 $AA^*=5E$.

$$|AA^*|=|5E|=5^3,\quad \text{则}|A^*|=\frac{1}{|A|}5^3=5^2.$$

例 5 证明：$AA^*=A^*A=|A|E$.

证 设 $A=(a_{ij})$，记 $AA^*=(b_{ij})$，则

$$b_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|A|\delta_{ij},$$

式中 A_{ij} 是 $|A|$ 中各元素的代数余子式，故

$$AA^*=(|A|\delta_{ij})=|A|(\delta_{ij})=|A|E.$$

类似可证

$$A^*A=\left(\sum_{k=1}^{n}A_{ki}a_{ki}\right)=(|A|\delta_{ij})=|A|E.$$

例 6 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，E 为单位矩阵，若 $B=E+AB$，$C=A+CA$，求 $B-C$.

解 由 $B=E+AB\Rightarrow(E-A)B=E\Rightarrow B=(E-A)^{-1}$.

又由 $C=A+CA\Rightarrow C(E-A)=A\Rightarrow C=A(E-A)^{-1}$.

故 $C=A(E-A)^{-1}=AB$. 于是

$$B-C=B-AB=E.$$

在矩阵的计算中，要对矩阵间的相互关系与代换进行认真的分析.

例 7 证明：若 $A^k=O$，则

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

证 $(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A)=E^k-A^k=E.$
由逆矩阵定义知，$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

例 8 设 $A,B,A+B$ 均为 n 级可逆方阵，证明：

(1) $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$；

(2) $A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A$.

证 (1) 因为

$$\begin{aligned}&(A^{-1}+B^{-1})[A(A+B)^{-1}B]\\ &=(E+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B\\ &=(B^{-1}B+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B\\ &=B^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}B\\ &=B^{-1}B=E,\end{aligned}$$

所以 $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆，且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=A(A+B)^{-1}B$.

(2) 因为

$$\begin{aligned}&(A^{-1}+B^{-1})[B(A+B)^{-1}A]\\ &=(A^{-1}B+E)(A+B)^{-1}A\\ &=(A^{-1}B+A^{-1}A)(A+B)^{-1}A\\ &=A^{-1}(B+A)(A+B)^{-1}A\\ &=A^{-1}A=E,\end{aligned}$$

所以 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$，由逆矩阵唯一性知

$$A(A+B)^{-1}B=B(A+B)^{-1}A.$$

例 9 设 $X=\begin{bmatrix}O & A\\ C & O\end{bmatrix}$，已知 A^{-1}，C^{-1} 存在，求 X^{-1}.

解 设 $X^{-1}=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}$ 则由

$$\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O & A\\ C & O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E & O\\ O & E\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}E & O\\ O & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{12}C & X_{11}A\\ X_{22}C & X_{21}A\end{bmatrix},$$

即 $X_{12}C=E$， $X_{11}A=O$， $X_{22}C=O$， $X_{21}A=E$.

解得 $X_{11}=O$， $X_{12}=C^{-1}$， $X_{21}=A^{-1}$， $X_{22}=O$，故

$$X^{-1}=\begin{bmatrix}O & C^{-1}\\ A^{-1} & O\end{bmatrix}.$$

例 10 求矩阵 X，设

(1) $\begin{pmatrix}2 & 5\\1 & 3\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 2 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\end{bmatrix}$；

(4) $X\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 2 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$；

解 关于矩阵方程解法参看疑难解析 3.

(1) 由 $AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B$. 因为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{bmatrix}$，故

$$X=\begin{bmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -6\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -23\\0 & 8\end{bmatrix}.$$

(2) 同(1). $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 2 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/6 & 2/3\\1/3 & 1/6 & -1/3\\-1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$，故

$$X=\begin{bmatrix}1/3 & 1/6 & 2/3\\1/3 & 1/6 & -1/3\\-1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11/6 & 1/2 & 1\\-1/6 & -1/2 & 0\\2/3 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

(3) 同(1). $\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\0 & 1 & \cdots & 1 & 1\\\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & -1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$，故

$$X=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & -1 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

(4) 由 $XA=B\Longrightarrow X=BA^{-1}$，即

$$X=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\0 & 2 & 2\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 1/6 & 2/3\\1/3 & 1/6 & -1/3\\-1/3 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-1/3 & 1/3 & 4/3\\2/3 & 1/3 & 1/3\\2/3 & 5/6 & 4/3\end{bmatrix}.$$

例 11 设

$$X=\begin{bmatrix}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}\\a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix},$$

其中 $a_i\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$求 X^{-1}.

解 对 n 较大的矩阵，一般不使用伴随矩阵法求逆阵，较多地使用初等变换法，有时也使用本例所用的待定(元素)法.

设 $X^{-1}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}$，由 $XX^{-1}=E$，得

$$\begin{bmatrix} a_1 x_{21} & a_1 x_{22} & \cdots & a_1 x_{2n} \\ a_2 x_{31} & a_2 x_{32} & \cdots & a_2 x_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} x_{n1} & a_{n-1} x_{n2} & \cdots & a_{n-1} x_{nn-1} \\ a_n x_{11} & a_n x_{12} & \cdots & a_n x_{1n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix},$$

解得 $x_{21}=\frac{1}{a_1}, x_{32}=\frac{1}{a_2}, \cdots, x_{nn-1}=\frac{1}{a_{n-1}}, x_{1n}=\frac{1}{a_n}$，其余的 $x_{ij}=0$，从而

$$X^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/a_n \\ 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

例 12 证明：

(1) 若 A 可逆对称(反对称)，则 A^{-1} 也对称(反对称)；

(2) 不存在奇数级的可逆反对称矩阵.

证 (1) 若 A 为非奇异的对称方阵，则有 $A'=A, AA^{-1}=E$，从而

$$(AA^{-1})'=E'=E, \quad 或 (A^{-1})' \cdot A'=(A^{-1})'A=E.$$

即 $(A^{-1})'$ 是 A 的逆阵. 由逆阵唯一性得 $(A^{-1})'=A^{-1}$，从而 A^{-1} 为对称矩阵.

同理可证，A 为反对称可逆时，A^{-1} 也为反对称可逆.

(2) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶反对称矩阵，n 是奇数，$a_{ij}=-a_{ji}$，则 $a_{ii}=0\ (i,j=1,2,\cdots,n)$.

从 $|A|$ 中每行提出 (-1)，得

$$|\boldsymbol{A}|=(-1)^n\begin{vmatrix}0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & 0 & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^n\begin{vmatrix}0 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^n|\boldsymbol{A}|,$$

显然，当 n 为奇数时，$|\boldsymbol{A}|=0$ 不可能有逆阵.

例 13 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 称为上(下)三角矩阵，若 $i>j(i<j)$ 时有 $a_{ij}=0$. 证明：

(1) 两个上(下)三角矩阵的乘积仍是上(下)三角矩阵；

(2) 可逆的上(下)三角矩阵的逆仍是上(下)三角矩阵.

证 (1) 由矩阵乘积定义，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，则 $c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$.

当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为上三角矩阵，即当 $i>j$ 时 $a_{ij}=b_{ij}=0$，则此时 $C_{ij}=0$，所以 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 也是上三角矩阵.

同理可证，当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为下三角矩阵时，$\boldsymbol{C}$ 也是下三角矩阵.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 A_{ij} 当 $i<j$ 时都是上三角行列式，且对角线上元素至少有一个零. 所以，当 $i<j$ 时 $A_{ij}=0$，从而 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 是上三角矩阵.

例 14 证明：$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵.

证 对等式 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 两端取行列式，得

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n|\boldsymbol{E}|.$$

若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$. 否则，由 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0\Longrightarrow \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{E}\Longrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{AA}^*(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=\boldsymbol{0}$，与 $|\boldsymbol{A}^*|\neq 0$ 矛盾。从而 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{A}^*|=0$，也有 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n\geqslant 2)$.

例 15 若 $\boldsymbol{A}$ 为 n $(n\geqslant 2)$ 阶方阵，证明：

$$\text{秩}(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & \text{当秩}(\boldsymbol{A})=n,\\ 1, & \text{当秩}(\boldsymbol{A})=n-1,\\ 0, & \text{当秩}(\boldsymbol{A})<n-1.\end{cases}$$

证 当秩$(\boldsymbol{A})=n$时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，由上例$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$，故$\boldsymbol{A}^*$可逆，有秩$(\boldsymbol{A}^*)=n$.

当秩$(\boldsymbol{A})=n-1$时，$|\boldsymbol{A}|=0$，则$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$. 于是秩$(\boldsymbol{A}^*)\leqslant 1$. 又秩$(\boldsymbol{A})=n-1$，必至少有一代数余子式$A_{ij}\neq 0$，故秩$(\boldsymbol{A}^*)\geqslant 1$，综上可知，秩$(\boldsymbol{A}^*)=1$.

当秩$(\boldsymbol{A})<n-1$时，$\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$，故秩$(\boldsymbol{A}^*)=0$.

例 16 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{E}_1 & & & \\ & a_2\boldsymbol{E}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_r\boldsymbol{E}_r \end{bmatrix}$，其中$a_i\neq a_j$，$i\neq j$ $(i,j=1,2,\cdots,r)$. $\boldsymbol{E}_i$是n_i阶单位矩阵，$\sum\limits_{i=1}^{r}n_i=n$. 证明：与$\boldsymbol{A}$可交换的矩阵只能是准对角矩阵

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_r \end{bmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}_i$是n_i阶矩阵$(i=1,2,\cdots,r)$.

证 设$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rr} \end{bmatrix}$与$\boldsymbol{A}$可交换，其中$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{A}$分块方式相同，则由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$得

$$\begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{B}_{11} & a_1\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & a_1\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_r\boldsymbol{B}_{r1} & a_r\boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & a_r\boldsymbol{B}_{rr} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1\boldsymbol{B}_{11} & a_2\boldsymbol{B}_{12} & \cdots & a_r\boldsymbol{B}_{1r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1\boldsymbol{B}_{r1} & a_2\boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & a_r\boldsymbol{B}_{rr} \end{bmatrix}.$$

由于$a_i\neq a_j$ $(i\neq j)$，所以由$(a_i-a_j)\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{O}$，得$\boldsymbol{B}_{ij}=\boldsymbol{O}(i\neq j)$，故$\boldsymbol{B}$为准对角矩阵，即

$$B=\begin{bmatrix}B_{11} & & & \\ & B_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_{rr}\end{bmatrix}.$$

例 17 证明：$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$，其中 A 是 n 阶方阵 $(n>2)$.

证 因为 $AA^*=A^*A=|A|E$，所以

(1) 当 $|A|\neq 0$ 时，$A^*=|A|A^{-1}$. 则

$$\begin{aligned}(A^*)^*&=(|A|A^{-1})^*=||A|A^{-1}|\cdot(|A|A^{-1})^{-1}\\&=|A|^n|A^{-1}|\frac{1}{|A|}(A^{-1})^{-1}\\&=|A|^n|A|^{-1}\frac{1}{|A|}A=|A|^{n-2}A.\end{aligned}$$

(2) 当 $|A|=0$ 时，由例 13 知，秩$(A)\leqslant 1$.

当 $n>2$ 时，秩$(A^*)^*=0$，故 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

当 $n=2$ 时，令 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，则 $A^*=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$，

$$(A^*)^*=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=A=|A|^{n-2}A.$$

例 18 设 A,B,C,D 都是 n 阶方阵，证明：当 $AC=CA$ 且 A 可逆时，$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|$.

证 由分块矩阵乘法知

$$\begin{bmatrix}E & O\\ -CA^{-1} & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ O & D-CA^{-1}B\end{bmatrix},$$

故

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}&=\begin{vmatrix}E & O\\ -CA^{-1} & E\end{vmatrix}\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & B\\ O & D-CA^{-1}B\end{vmatrix}\\&=|A||D-CA^{-1}B|=|AD-ACA^{-1}B|\\&=|AD-CAA^{-1}B|=|AD-CB|.\end{aligned}$$

例 19 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵,证明:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = |\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{BA}|.$$

证 因为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB} \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}$$

$$= |\boldsymbol{E}_m||\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{BA}|.$$

又因 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}$,所以

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}$$

$$= |\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{BA}||\boldsymbol{E}_n| = |\boldsymbol{E}_m - \boldsymbol{BA}|.$$

例 20 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别是 $n\times m$ 和 $m\times n$ 矩阵,$\lambda\neq 0$,证明:

$$|\lambda\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB}| = \lambda^{n-m}|\lambda\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{BA}|.$$

证 因为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{E}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB} \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{E}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB} \end{vmatrix}$$

$$= |\lambda\boldsymbol{E}_m||\lambda\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB}| = \lambda^m|\lambda\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{AB}|;$$

又因为

$$\begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \lambda\boldsymbol{E}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{O} \\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{E}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \lambda\boldsymbol{E}_n \end{bmatrix},$$

所以

$$\begin{vmatrix} \lambda E_n & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_m & B \\ A & \lambda E_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_m & O \\ -A & E_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda E_m - BA & B \\ O & \lambda E_n \end{vmatrix}$$

$$= |\lambda E_m - BA| \, |\lambda E_n| = \lambda^n |\lambda E_m - BA|.$$

于是 $$\lambda^n |\lambda E_m - BA| = \lambda^m |\lambda E_n - AB|,$$

即有 $$|\lambda E_n - AB| = \lambda^{n-m} |\lambda E_m - BA|.$$

例 21 设 A,B,C,D 都是 n 阶方阵，A 可逆. 且

$$X = \begin{bmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{bmatrix}.$$

(1) 求乘积 XYZ；

(2) 证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \, |D - CA^{-1}B|$.

解 (1) $$XYZ = \begin{bmatrix} E & O \\ -CA^{-1} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & B \\ O & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -A^{-1}B \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

(2) 利用题(1)的结果得

$$|XYZ| = \begin{vmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{vmatrix} = |A| \, |D - CA^{-1}B|.$$

又因为 $|XYZ| = |X| \, |Y| \, |Z|$，$|X| = 1$，$|Z| = 1$，所以

$$|XYZ| = |Y| = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix},$$

从而 $$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \, |D - CA^{-1}B|.$$

例 22 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&1&0&0\\0&0&2&5\\0&0&1&3\end{bmatrix}$;

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}n&0&0&\cdots&0&0\\0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&2&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&n-1&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$.

解 利用分块矩阵求逆.

因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}_2^{-1}\end{bmatrix}$

(1) 令 $\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}2&1&0&0\\1&1&0&0\\\hdashline 0&0&2&5\\0&0&1&3\end{array}\right]$,因为

$$\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-5\\-1&2\end{bmatrix},$$

所以 $$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\-1&2&0&0\\0&0&3&-5\\0&0&-1&2\end{bmatrix}.$$

(2) 令 $\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:ccccc}n&0&0&\cdots&0&0\\\hdashline 0&0&0&\cdots&0&1\\0&0&0&\cdots&2&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&n-1&0&\cdots&0&0\end{array}\right]$,因为

$$\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&2&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\n-1&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1/(n-1)\\0&0&\cdots&1/(n-2)&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\end{bmatrix},$$

所以 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/(n-1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/(n-2) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

第三节 初等矩阵

主要内容

1. 定义 1 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵.

$$P(i,j)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & \cdots & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix};$$

$$P(i(c))=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix};$$

$$P(i,j(k))=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & \cdots & k & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix}.$$

2. 引理　对一个 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等行变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左端乘上相应的 $s\times s$ 初等矩阵；对 $\boldsymbol{A}$ 作一次初等列变换就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右端乘上相应的 $n\times n$ 初等矩阵.

3. 初等矩阵都是可逆的，其逆还是初等矩阵.

$$[\boldsymbol{P}(i,j)]^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j),\quad [\boldsymbol{P}(j(c))]^{-1}=\boldsymbol{P}(i(c^{-1})),$$
$$[\boldsymbol{P}(i,j(k))]^{-1}=\boldsymbol{P}(i,j(-k)).$$

4. 定义 2　若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等变换得到，则称矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为**等价**的.

等价具有反身性、对称性与传递性.

5. 定理 1　任意一个 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一形式为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$ 的矩阵等价，此矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**标准形**. r 等于秩$(\boldsymbol{A})$.

6. 定理 2　n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 能表成一些初等矩阵的乘积：

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_m.$$

推论 1　两个 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件为，存在可逆的 s 阶矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与可逆的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PBQ}$.

推论 2　可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化为单位矩阵.

可逆矩阵也可用一系列初等列变换化为单位矩阵.

疑 难 解 析

怎样用初等变换法求可逆矩阵的逆矩阵？

答　因为可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化为单位矩阵，那么用这一系列初等行变换就可以化单位矩阵为可逆矩阵的逆矩阵，即

若 $\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{P}_{m-1}\cdots\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_m\boldsymbol{P}_{m-1}\cdots\boldsymbol{PE}$.

所以，若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，作 $n\times 2n$ 矩阵$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})$，对其施行一系列初等行变换化为$(\boldsymbol{E}\mid\boldsymbol{A}^{-1})$. 注意，当 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{E}$ 时，$\boldsymbol{E}$ 即化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

也可作 $2n\times n$ 矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$,进行初等列变换,当 $\boldsymbol{A}$ 化为 $\boldsymbol{E}$ 时,$\boldsymbol{E}$ 即化为$\boldsymbol{A}^{-1}$.

方法、技巧与典型例题分析

矩阵的求逆不仅在计算题中遇到,在命题证明中也经常会遇到,不仅要能求出具体的数字矩阵的逆矩阵,还会遇到求抽象矩阵的逆矩阵. 因此,熟练掌握可逆矩阵求逆的方法与技巧是十分重要的.

例 1 求 $\boldsymbol{A}^{-1}$. 设

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}, ad-bc=1$;　(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$;

(3) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$;　(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{bmatrix}$;

(5) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$;　(6) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 3 & -4 & -3\\ 0 & 6 & 1 & 1\\ 5 & 4 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3 & 2\end{bmatrix}$;

(7) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -5 & 7\\ 0 & 1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$;　(8) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0 & 0\\ 5 & 7 & 1 & 8\\ -1 & -3 & -1 & -6\end{bmatrix}$;

(9) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 7 & 6 & -1\\ 1 & 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$;　(10) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

解 可逆矩阵求逆的常用方法有：

① 伴随矩阵法，适用于 $n\leqslant 4$ 的矩阵；

② 初等行(列)变换法，适用于一般矩阵；

③ 待定元素法，设 $\boldsymbol{A}^{-1}=(a_{ij})$，利用比较等式两边对应元素求解. 适用 n 较小或形式较特殊的矩阵；

④ 分块求逆法，适用$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$型等特殊类型矩阵.

(1) 用伴随矩阵法. 因为 $|\boldsymbol{A}|=ad-bc$，$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$，

所以
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}}{ad-bc}=\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}.$$

(2)
$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$
$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 3 & -2 & 1\end{array}\right]$$
$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 & -1/3\end{array}\right]$$

所以
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1/3 & 1/3\\ 0 & 1/3 & -2/3\\ -1 & 2/3 & -1/3\end{bmatrix}.$$

(3)
$$(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&-4&-3\\0&1&0&1&-5&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right],$$

所以 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{bmatrix}.$$

$$(4)\ (A\mid E)=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&2&3&4&1&0&0&0\\2&3&1&2&0&1&0&0\\1&1&1&-1&0&0&1&0\\1&0&-2&-6&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&22&-6&-26&17\\0&1&0&0&-17&5&20&-13\\0&0&1&0&-1&0&2&-1\\0&0&0&1&4&-1&-5&3\end{array}\right],$$

所以 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}22&-6&-26&17\\-17&5&20&-13\\-1&0&2&-1\\4&-1&-5&3\end{bmatrix}.$$

(5) 由矩阵 A 的特殊性,因为

$$A\cdot A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4E.$$

所以 $\left(\frac{1}{4}A\right)\cdot A=E$,于是 $A^{-1}=\frac{1}{4}A$.

$$(6)\ (A \mid E)=\left[\begin{array}{cccc|cccc}3&3&-4&-3&1&0&0&0\\0&6&1&1&0&1&0&0\\5&4&2&1&0&0&1&0\\2&3&3&2&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-7&5&12&-19\\0&1&0&0&3&-2&-5&8\\0&0&1&0&41&-30&-69&111\\0&0&0&1&-59&43&99&-159\end{array}\right],$$

所以
$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-7&5&12&-19\\3&-2&-5&8\\41&-30&-69&111\\-59&43&99&-159\end{bmatrix}.$$

(7) 由 A 为三角形矩阵，$|A|=1$，得

$$A^{-1}=A^{*}=\begin{bmatrix}1&-3&11&-38\\0&1&-2&7\\0&0&1&-2\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

(8) 因 $A=\begin{bmatrix}B&O\\C&D\end{bmatrix}$，用分块求逆法，得

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1}&O\\-D^{-1}CB^{-1}&D^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1&0&0\\-3&2&0&0\\-5&7&-3&-4\\2&-2&1/2&1/2\end{bmatrix}.$$

$$(9)\ (A \mid E)=\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&0&1&-1&1&0&0&0\\0&3&1&4&0&1&0&0\\2&7&6&-1&0&0&1&1\\1&2&2&-1&0&0&0&0\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1/6&1/2&-7/6&10/3\\0&1&0&0&-7/6&-1/2&5/6&-5/3\\0&0&1&0&3/2&1/2&-1/2&1\\0&0&0&1&1/2&1/2&-1/2&1\end{array}\right]$$

所以 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1/6 & 1/2 & -7/6 & 10/3\\ -7/6 & -1/2 & 5/6 & -5/3\\ 3/2 & 1/2 & -1/2 & 1\\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & 1\end{bmatrix}.$$

(10) $$(A \vdots E)=\left[\begin{array}{ccccc:ccccc}2&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&2&1&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&2&1&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&2&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc:ccccc}1&0&0&0&0&1/2&-1/4&1/8&-1/16&1/32\\0&1&0&0&0&0&1/2&-1/4&1/8&-1/16\\0&0&1&0&0&0&0&1/2&-1/4&1/8\\0&0&0&1&0&0&0&0&1/2&-1/4\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1/2\end{array}\right]$$

所以 $$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&-1/4&1/8&-1/16&1/32\\0&1/2&-1/4&1/8&-1/16\\0&0&1/2&-1/4&1/8\\0&0&0&1/2&-1/4\\0&0&0&0&1/2\end{bmatrix}.$$

例 2 用两种方法求 A 的逆矩阵

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\ \hdashline 1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{array}\right].$$

(1) 用初等变换;

(2) 按 A 中划分,利用分块乘法的初等变换.

解 (1)

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})=\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&-1&1&-1&0&1&0&0\\1&1&-1&-1&0&0&1&0\\1&-1&-1&1&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-2&0&-2&-1&1&0&0\\0&0&-2&-2&-1&0&1&0\\0&-2&-2&0&-1&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&1&0&1/2&1/2&0&0\\0&1&0&1&1/2&-1/2&0&0\\0&0&-2&-2&-1&0&1&0\\0&0&-2&2&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&-1&0&1/2&1/2&0\\0&1&0&1&1/2&-1/2&0&0\\0&0&1&1&0&0&-1/2&0\\0&0&0&4&1&-1&-1&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1/4&1/4&1/4&1/4\\0&1&0&0&1/4&-1/4&1/4&-1/4\\0&0&1&0&1/4&1/4&-1/4&-1/4\\0&0&0&1&1/4&-1/4&-1/4&1/4\end{array}\right],$$

所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1/4&1/4&1/4&1/4\\1/4&-1/4&1/4&-1/4\\1/4&1/4&-1/4&-1/4\\1/4&-1/4&-1/4&1/4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\boldsymbol{A}.$$

（2）记 $A=\begin{bmatrix} B & B \\ B & -B \end{bmatrix}$，式中 $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$，$B^{-1}=$ $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}=\frac{1}{2}B$. 因为 $T=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$时，

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & -(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}+D^{-1} \end{bmatrix},$$

所以

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} (B-BB^{-1}B)^{-1} & -(B-B(-B^{-1})B)B(-B)^{-1} \\ -(-B)^{-1}B(B-B(-B)^{-1}B)^{-1} & (-B)^{-1}B(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}B(-B)^{-1}+(-B)^{-1} \end{bmatrix},$$

式中 $(B-B(-B)^{-1}B)^{-1}=(B+B)^{-1}=(2B)^{-1}=\frac{1}{2}B^{-1}$，故

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2B^{-1} & 1/2B^{-1} \\ 1/2B^{-1} & -1/2B^{-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} B^{-1} & B^{\frac{1}{2}} \\ B^{-1} & -B^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} B & B \\ B & -B \end{pmatrix}=\frac{1}{4}A.$$

例 3 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，且秩$(A)=r$. 证明：存在一个 $n\times n$ 可逆矩阵 P，使 PAP^{-1}的后 $n-r$ 行全为零.

证 因为秩$(A)=r$，所以存在可逆阵 P,Q，使 $PAQ=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$，即 $PAP^{-1}=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q^{-1}P^{-1}$.

设 $Q^{-1}P^{-1}=\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}$，则由分块乘法得

$$PAP^{-1}=\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & C \\ D & F \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & C \\ O & O \end{pmatrix};$$

因为 B,C 均为 r 行矩阵，所以 PAP^{-1}的后 $n-r$ 行全为零.

例 4 (1) 把矩阵$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$表为形式为$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}$的矩阵的乘积；

(2) 设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 为一复数矩阵，$|A|=1$，证明：A 可以表为形式为(1)的矩阵的乘积.

解 (1) 表示法不是唯一的. 例如：

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2+\frac{1}{a}c_1} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1+(1-a)c_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^{-1}-1 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2+(1-a^{-1})r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a^{-1} & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-a & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a^{-1}-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 若 $a\neq 0$，可将 A 的 $c_1\times(-a^{-1}b)$ 加到 c_2 上，得 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d' \end{pmatrix}$，$d'=d-a^{-1}bc=a^{-1}$；再将 $r_1\times(-a^{-1}c)$ 加到 r_2 上得 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$，即(1)的情形.

若 $a=0$，则 $c\neq 0$，将 r_2 加到 r_1 上得 $\begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$ 又归到上面情形.

例 5 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，$|A|=1$. 证明：A 可以表成 $P(i,j(k))$ 这一类初等矩阵的乘积.

证 用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，即例 4 中题(2)的情形，故成立.

设在 $n-1$ 情形也成立. 下面证明在 n 情形成立.

(1) 若 A 中 $a_{11}\neq 0$，对 A 进行一系列行的 $P(i,j(k))$ 运算，如

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+\frac{1-a_{21}}{a_{11}}r_1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(1-a_{11})r_2} \begin{bmatrix} 1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 1 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{def}} \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{B},$$

故 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{B}_1|=1$. 于是，由归纳假设

$$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{P}_1(i_1,j_1(k_1),\cdots,\boldsymbol{P}_s(i_s,j_s(k_s)),$$

得 $$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_1 \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{P}_s \end{bmatrix}\triangleq \boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s.$$

其中 $\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_s$ 为 n 阶 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$ 初等矩阵.

由于 $\boldsymbol{A}$ 可经一系列初等矩阵乘积得到 $\boldsymbol{B}$，从而

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}_1\cdots\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{B}\boldsymbol{T}_1\cdots\boldsymbol{T}_r=\boldsymbol{R}_1\cdots\boldsymbol{R}_t\boldsymbol{Q}_1\cdots\boldsymbol{Q}_s\boldsymbol{T}_1\cdots\boldsymbol{T}_r,$$

式中 $\boldsymbol{R}_i$ $(i=1,2,\cdots,t)$，$\boldsymbol{T}_j(j=1,2,\cdots,r)$ 均为 n 阶 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$ 初等矩阵. 命题得证.

(2) $a_{11}=0$，则因 $|\boldsymbol{A}|=1\neq 0$，至少有一个 $a_{1j}\neq 0$，进行一次 n 阶 $\boldsymbol{P}(i,j(k))$ 初等变换即可将 a_{1j} 换到 a_{11} 位置，即(1)的情形.

例 6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{sn}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{nm}$，证明：

秩$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\geqslant$秩$(\boldsymbol{A})+$秩$(\boldsymbol{B})-n$.

证 因为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$，而 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_m \end{bmatrix}$ 可逆，所以

$$\text{秩}(\boldsymbol{A})+\text{秩}(\boldsymbol{B})\leqslant\text{秩}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}=\text{秩}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}=\text{秩}\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$$

$$=\text{秩}(\boldsymbol{AB})+\text{秩}(\boldsymbol{E}_n)=\text{秩}(\boldsymbol{AB})+n,$$

所以 $$秩(\boldsymbol{AB})\geqslant 秩(\boldsymbol{A})+秩(\boldsymbol{B})-n.$$

例 7 矩阵的行(列)向量组若是线性无关的，则称该矩阵为行(列)**满秩**的. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times r$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩的充分必要条件是存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

同样地，$\boldsymbol{A}$ 为行满秩的充分必要条件是存在 r 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{E}_m\quad \boldsymbol{O})\boldsymbol{Q}$.

证 设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{P}$ 是 m 阶可逆阵，则秩$(\boldsymbol{A})=$ 秩$\left[\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\right]=$秩$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=r$，从而 $\boldsymbol{A}$ 满秩.

必要性 设秩$(\boldsymbol{A})=r$，则 $\boldsymbol{A}$ 必有一 r 阶子式不为零，设这一 r 阶子式位于 $\boldsymbol{A}$ 左上角(否则可通过初等行变换实现).

(1) 若 $a_{11}\neq 0$，则可通过初等行变换化 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & a'_{12} & \cdots & a'_{1n}\\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn}\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}',$$

(若 $a_{11}=0$，可通过行变换，使 a_{11} 位置元素不为零).

(2) 若 $a'_{22}\neq 0$，则可通过初等行变换化 $\boldsymbol{A}'$为

$$\boldsymbol{A}'\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & a''_{13} & \cdots & a''_{1n}\\ 0 & 1 & a''_{23} & \cdots & a''_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & a''_{n3} & \cdots & a''_{nn}\end{bmatrix},$$

(若 $a'_{22}=0$，可通过行变换，使 a'_{22} 位置元素不为零).

如此 r 次，则 $\boldsymbol{A}\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$，即存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{PA}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.

行满秩情形类似可证.

例 8 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，证明：有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$

和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q，使 $A=PQ$.

证 因为秩$(A)=r$，故存在可逆阵 $P_{m\times m}$ 与 $Q_{n\times n}$，使得

$$PAQ=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}，即\ A=P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q^{-1}.$$

设 $P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$, $Q=\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}$,

则 $$A=P^{-1}\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix}(Q_{11},Q_{12})\triangleq P_1Q_1.$$

式中 $P_1=\begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \end{bmatrix}$是 P 的前 r 列构成的列满秩矩阵，$Q_1=(Q_{11},Q_{12})$ 是 Q 的前 r 行构成的行满秩矩阵.

例 9 证明：秩$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}=$秩$(A)+$秩$(B)$.

证 设秩$(A)=r$，秩$(B)=s$，则存在可逆阵 P_1,Q_1 和 P_2,Q_2，使得

$$P_1AQ_1=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix},\quad P_2BQ_2=\begin{bmatrix} E_s & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

从而 $$\begin{bmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r & & & \\ & O & & \\ & & E_s & \\ & & & O \end{bmatrix}.$$

因为初等变换不改变矩阵的秩，故

$$秩\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}=秩\begin{bmatrix} E_r & & & \\ & O & & \\ & & E_s & \\ & & & O \end{bmatrix}=秩\begin{bmatrix} E_r & & \\ & E_s & \\ & & O \end{bmatrix}$$

$$=r+s=秩(A)+秩(B).$$

例 10 证明：

$$秩(A)+秩(B)\leqslant秩\begin{bmatrix}A & O\\ D & B\end{bmatrix}\leqslant秩(A)+秩(B)+秩(D).$$

证 因为秩$(P,Q)\leqslant$秩$(P)+$秩(Q),秩$\begin{bmatrix}P\\ Q\end{bmatrix}\leqslant$秩$(Q)$,所以

$$\begin{aligned}秩\begin{bmatrix}A & O\\ D & B\end{bmatrix}&\leqslant秩(A,O)+秩(D,B)\\ &\leqslant秩(A)+秩(B)+秩(D)+秩(B)\\ &=秩(A)+秩(B)+秩(D).\end{aligned}$$

再设秩$(A)=r$,秩$(B)=s$,则

$$\begin{bmatrix}A & O\\ D & B\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}E_r & O & O & O\\ O & O & O & O\\ D_1 & D_2 & E_s & O\\ D_3 & D_4 & O & O\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}E_r & & & \\ & E_s & & \\ & & D_4 & \\ & & & O\end{bmatrix},$$

所以

$$秩\begin{bmatrix}A & O\\ D & B\end{bmatrix}=秩(A)+秩(B)+秩(D_4)\geqslant秩(A)+秩(B).$$

从而命题得证.

例 11 解矩阵方程组$\begin{cases}AX+BY=P,\\ CX+DY=Q,\end{cases}$ 其中:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -6 & -13\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}9 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 6 & 4\end{bmatrix}.$$

解 因为 A,B 可逆,所以,有

$$\begin{cases}X+A^{-1}BY=A^{-1}P,\\ X+C^{-1}DY=C^{-1}Q.\end{cases}$$

将两式相减,得

$$(A^{-1}B-C^{-1}D)Y=A^{-1}P-C^{-1}Q.$$

因为 $A^{-1}B-C^{-1}D=\begin{bmatrix}23/3 & 12\\ 5/3 & 3\end{bmatrix}$可逆，所以

$$Y=(A^{-1}B-C^{-1}D)^{-1}(A^{-1}P-C^{-1}Q),$$

其中 $A^{-1}P-C^{-1}Q=\begin{bmatrix}19/6 & -10/3\\ 2/3 & -4/3\end{bmatrix}$. 故

$$Y=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}9 & 36\\ -1 & -28\end{bmatrix}\text{，代入方程解得 } X=\frac{1}{18}\begin{bmatrix}70 & -2\\ -3 & 24\end{bmatrix}.$$

第五章　二　次　型

二次型的理论不仅在几何学而且也在数学的其它分支以及物理、力学上都非常有用.通过矩阵乘法将二次型与对称矩阵联系起来，同时也使对称矩阵问题可以用二次型方法解决.重点是化二次型为标准形，正定二次型与正定矩阵的判定与证明.

第一节　二次型及其矩阵表示　标准形

主 要 内 容

1. 一个系数在数域 P 中的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2,$$

称为数域 P 上的一个 n **元二次型**(**简称二次型**).

2. 定义　设 $x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n$ 是两组文字，系数在数域 P 中的一组关系式

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n, \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n, \\ \quad\vdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的一个**线性替换**.若系数行列式 $|c_{ij}|\neq0$，则线性替换称为**非退化的**.

3.
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad ①$$

称为**二次型的矩阵**，因 $a_{ij}=a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$，二次型的矩阵都是对称的.

令 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，则二次型可表成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}.$$

4. 若有数域 P 上可逆的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，则称数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为**合同的**.

合同关系具有：

(1) 反身性　$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$；

(2) 对称性　由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，即得 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}^{-1})'\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{-1}$；

(3) 传递性　由 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{C}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{C}_2'\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_2$，即得

$$\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{C}_2'\boldsymbol{C}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2=(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2)'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2).$$

5. 定理1　数域 P 上任意一个二次型都可以经过非退化的替换变成平方和的形式：

$$d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2, \qquad ②$$

即对于任意一个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可以找到一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 成对角矩阵.

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$$

称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的一个标准形.

疑 难 解 析

化二次型为标准形有哪些方法？具体怎样实施？

答　常用配方法、初等变换法、正交变换法.

(1) 配方法：关键是要消去交叉项.

a) 若二次型含有平方项与交叉项. 先将含 x_1 的各项集中一起配成完全平方，再将余下项中含 x_2 的各项集中一起配成完全平方，如此继续，直至将各项都配成完全平方. 注意：每次只对一个变量配平方，余下项中不再出现这个变量. 用新变量代替各平方项中的变量，即作出一次非退化线性替换，同时可立即写出其逆变换.

b) 若二次型中无平方项，只有交叉项，先用平方差公式，再

用配方法.

如若 $a_{ij}\neq 0$ $(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$,则作

$$\begin{cases}x_i=y_i+y_j,\\ x_j=y_i-y_j, & (k\neq i \text{ 和 } j,k=1,2,\cdots,n)\\ x_k=y_k\end{cases}$$

将 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$化为 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,其中至少含有平方项 y_i^2,y_j^2,再用配方法.

(2) 初等变换法:用非退化线性替换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形,相当于对于对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 找一个可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$,使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵.

因为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s(\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s$ 是可逆矩阵),故

$$\boldsymbol{P}_1'\boldsymbol{P}_2'\cdots\boldsymbol{P}_s'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{D},\quad \boldsymbol{E}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s=\boldsymbol{C}.$$

所以,用初等变换法化二次型为标准形步骤是:

a) 写出二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}$,构造矩阵$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$.

b) 对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换与相同的初等列变换,把 $\boldsymbol{A}$ 化为对角形矩阵 $\boldsymbol{D}$;而对 $\boldsymbol{E}$ 只进行与 $\boldsymbol{A}$ 相同的初等列变换,化 $\boldsymbol{E}$ 为 $\boldsymbol{C}$,有 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$.

c) 写出非退化替换 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$,化二次型为标准形 $f=\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{Y}$.

(3) 正交变换法(见第九章).

方法、技巧与典型例题分析

切实掌握化二次型为标准形的方法.要求能熟练地将一个二次型化为标准形,并写出非退化线性退换.

例 1 用非退化线性变换化下列二次型为标准形,并利用矩阵验算所得结果.

(1) $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

(2) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$;

(3) $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

(4) $8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$；

(5) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$；

(6) $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$；

(7) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$.

解　分清类型，选用适当方法.

(1) 无平方项型. 令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=y_3,\end{cases}$$

则
$$\begin{aligned}f&=-4y_1^2+4y_2^2+4y_1y_3=-(2y_1-y_3)^2+4y_2^2+y_3^2\\&=-z_1^2+4z_2^2+z_3^2.\end{aligned}$$

由
$$\begin{cases}z_1=2y_1\quad -y_3,\\z_2=\quad y_2,\\z_3=\quad\quad y_3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=\frac{1}{2}z_1\quad+\frac{1}{2}z_3,\\y_2=\quad z_2,\\y_3=\quad\quad z_3.\end{cases}$$

从而
$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}z_1+z_2+\frac{1}{2}z_3,\\x_2=\frac{1}{2}z_1-z_2+\frac{1}{2}z_3,\\x_3=\quad\quad z_3,\end{cases}\Rightarrow \text{变换矩阵 } \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1/2&1&1/2\\1/2&-1&1/2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

故
$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}&=\begin{bmatrix}1/2&1/2&0\\1&-1&0\\1/2&1/2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-2&1\\-2&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&1&1/2\\1/2&-1&1/2\\0&0&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 有平方项与交叉项型.

$$f=(x_1+x_2)^2+(x_2+2x_3)^2=y_1^2+y_2^2.$$

由 $$\begin{cases} y_1=x_1+x_2, \\ y_2=x_2+2x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1-y_2+2y_3, \\ x_2=y_2-2y_3, \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

得变换矩阵 $$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{T'AT}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(3) $f=(x_1-x_2+x_3)^2-(2x_2+x_3)^2=y_1^2-y_2^2.$

由 $$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3, \\ y_2=2x_2+x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=y_1+\frac{1}{2}y_2-\frac{3}{2}y_3, \\ x_2=\frac{1}{2}y_2-\frac{1}{2}y_3, \\ x_3=y_3, \end{cases}$$

得变换矩阵 $$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以

$$\boldsymbol{T'AT}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ -3/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) 无平方项型. 令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_4, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_2 - y_3, \\ x_4 = y_1 - y_4, \end{cases}$$

则 $f = 8y_1^2 - 8y_4^2 + 10y_1y_2 - 10y_2y_4 + 6y_1y_3 - 6y_3y_4 + 2y_2^2 - 2y_3^2$

$$= 8\left(y_1 + \frac{5}{8}y_2 + \frac{3}{8}y_3\right)^2 - 8\left(y_4 + \frac{5}{8}y_2 + \frac{3}{8}y_3\right)^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2$$

$$= 8z_1^2 + 2z_2^2 - 2z_3^2 - 8z_4^2.$$

由 $\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{5}{8}y_2 + \frac{3}{8}y_3, \\ z_2 = y_2, \\ z_3 = y_3, \\ z_4 = \frac{5}{8}y_2 + \frac{3}{8}y_3 + y_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = z_1 - \frac{5}{8}z_2 - \frac{3}{8}z_3, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \\ y_4 = -\frac{5}{8}z_2 - \frac{3}{8}z_3 + z_3, \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 - \frac{5}{4}z_2 - \frac{3}{4}z_3 + z_4, \\ x_2 = z_2 + z_3, \\ x_3 = z_2 - z_3, \\ x_4 = z_1 - z_4. \end{cases}$$

得变换矩阵 $\qquad T = \begin{bmatrix} 1 & -5/4 & -3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$

所以

$$T'AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -5/4 & 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5/4 & -3/4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-8\end{bmatrix}.$$

(5) 无平方项型. 令

$$\begin{cases}x_1=y_1+y_2,\\x_2=y_1-y_2,\\x_3=\qquad\qquad y_3+y_4,\\x_4=\qquad\qquad y_3-y_4,\end{cases}$$

则 $f=y_1^2-y_2^2+4y_1y_3+y_3^2-y_4^2=(y_1+2y_3)^2-y_2^2-y_3^2-y_4^2.$

由 $\begin{cases}z_1=y_1\qquad +2y_3,\\z_2=\quad y_2,\\z_3=\qquad\qquad y_3,\\z_4=\qquad\qquad\quad y_4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=z_1\qquad -2z_3,\\y_2=\quad z_2,\\y_3=\qquad\qquad z_3,\\y_4=\qquad\qquad\quad z_4,\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=z_1+z_2-2z_3,\\x_2=z_1-z_2-2z_3,\\x_3=\qquad\qquad z_3+z_4,\\x_4=\qquad\qquad z_3-z_4.\end{cases}$$

得变换矩阵 $$T=\begin{bmatrix}1&1&-2&0\\1&-1&-2&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix},$$

所以

$$T'AT=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\-2&-2&1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1/2&1/2&1/2\\1/2&0&1/2&1/2\\1/2&1/2&0&1/2\\1/2&1/2&1/2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&-2&0\\1&-1&-2&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}.$$

当 f 的标准形为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2-3y_4^2$ 时，线性替换的矩阵为

$$C=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&-1&-1&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&2\end{bmatrix}.$$

还可以用例 7(2) 的方法解，则标准形与线性替换的矩阵又不相同.

(6) $f=(x_1+2x_2+2x_3+x_4)^2-2\left(x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\right)^2$

$+\frac{1}{2}(x_3+x_4)^2$

$=y_1^2-2y_2^2+\frac{1}{2}y_3^2.$

由 $\begin{cases}y_1=x_1+2x_2+2x_3+x_4,\\ y_2=x_2+\frac{3}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,\\ y_3=x_3+x_4,\\ y_4=x_4,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1-2y_2+y_3-y_4,\\ x_2=y_2-\frac{3}{2}y_3+y_4,\\ x_3=y_3-y_4,\\ x_4=y_4,\end{cases}$

得变换矩阵 $$T=\begin{bmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-3/2&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix},$$

所以

$$T'AT=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-3/2&1&0\\-1&1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2&1\\2&2&1&1\\2&1&0&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&1&-1\\0&1&-3/2&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

(7) $f=x_1^2+(x_1+x_2+x_3)^2+(x_3+x_4)^2-(x_1+x_3)^2$
$=y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$,

由 $\begin{cases}y_1=x_1,\\y_2=x_1+x_2+x_3,\\y_3=x_3+x_4,\\y_4=x_1+x_3,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=y_1,\\x_2=y_2-y_4,\\x_3=-y_1+y_4,\\x_4=y_1+y_3-y_4,\end{cases}$

得变换矩阵 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\end{bmatrix}$,

所以

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&1&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-1\\-1&0&0&1\\1&0&1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{bmatrix}.$$

将一个二次型 f 经非退化线性替换化为标准形，标准形不是唯一的. 不仅采用不同的方法所化成的标准形可能不同，就是采用同一种方法，由于替换不同，所化成标准形也可能不同. 但是，该二次型的秩、正负惯性指数是不变的(见第二节).

例 2 证明：秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

证　设 A 是任一秩等于 r 的 n 级对称矩阵，因为对称矩阵总能合同一个对角矩阵，故存在一个可逆阵 C 及非零数 $d_1,d_2,\cdots,d_r$，使

$$C'AC=D=\begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}+\cdots$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$=D_1+D_2+\cdots+D_r,$$

则

$$A=(C')^{-1}AC=(C')^{-1}(D_1+D_2+\cdots+D_r)C$$

$$=B_1+B_2+\cdots+B_r.$$

式中 $B_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是秩为 1 的对称矩阵.

例 3　证明：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \text{与} \begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix} \text{合同，}$$

式中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

证 对二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 x_2^2+\cdots+\lambda_n x_n^2$$

施行线性替换：$y_1=x_{i_1},\cdots,y_n=x_{i_n}$，则得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\lambda_{i_1} y_1^2+\lambda_{i_2} y_2^2+\cdots+\lambda_{i_n} y_n^2,$$

从而知两矩阵合同.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶矩阵，证明：

(1) $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵当且仅当对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$；

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，且对任一个 n 维向量 $\boldsymbol{X}$，有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证 (1) 设有 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}'$，即 $\boldsymbol{A}$ 反对称. 则由于 $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，必有

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}'(-\boldsymbol{A})'\boldsymbol{X}=-(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X})'=-\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X},$$

从而 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$.

反之，若对任一 $\boldsymbol{X}$ 都有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$，令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，取 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{\varepsilon}_i'=(0,\cdots,1,\cdots,0)$，则由题设知 $\boldsymbol{\varepsilon}_i'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_i=a_{ii}=0$.

若取 $\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{\varepsilon}_i'+\boldsymbol{\varepsilon}_j'$，则

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=a_{ii}+a_{ij}+a_{ji}+a_{jj}=0,$$

从而知 $a_{ij}+a_{ji}=0$，得 $a_{ij}=-a_{ji}$，故 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

(2) 因为若对任意 n 维向量 $\boldsymbol{X}$ 都有 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=0$，则由题(1)知，$\boldsymbol{A}$ 是反对称的. 又由题设知 $\boldsymbol{A}$ 是对称的，故由 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}',\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'\Rightarrow \boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}\Rightarrow \boldsymbol{A}=0$.

例 5 若把实 n 阶对称矩阵按合同分类，即两个实 n 级对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有几类？

解 共有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 类.

因为，若实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同，则

$$P'AP=C'BC=\begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (d_i\neq 0, i=1,2,\cdots,r).$$

对相应二次型考虑 d_i 取值的正负可分为：

r 个正，0 个负；$r-1$ 个正，1 个负；…，1 个正，$r-1$ 个负；0 个正，r 个负，共 $r+1$ 类.

又 r 又可取 $0,1,2,\cdots,n$，故共有类数

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

例 6 证明：一个实二次型可以分解为两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是，它的秩等于 2 和符号差为零或秩等于 1.

证 必要性 设

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)(b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n).$$

(1) 若 $b_i=ka_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，不妨设 $a_1\neq 0$. 令

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n, \\ y_i=x_i \quad (i=2,\cdots,n), \end{cases}$$

则
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)|_{x=Py}=ky_1^2,$$

故 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的秩为 1.

(2) 若系数不成比例，设 $\frac{a_1}{b_1}\neq\frac{a_2}{b_2}$. 令

$$\begin{cases} y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n, \\ y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n, \\ y_i=x_i \quad (i=3,\cdots,n), \end{cases} \text{即 } P_1^{-1}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & & b_n \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & & 1 \end{bmatrix},$$

则 $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big|_{x=P_1y}=y_1y_2.$$
再令
$$\begin{cases}y_1=z_1+z_2,\\y_2=z_1-z_2,\\y_i=z_i\quad(i=3,\cdots,n),\end{cases}\qquad 即\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}1&1&&&\\1&-1&&&\\&&1&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix},$$
则 $$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big|_{x=P_1y}=y_1y_2\big|_{y=P_2z}=z_1^2-z_2^2.$$
故二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于 2,符号差为零.

充分性　若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩为 1,则经非退化线性替换可化为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big|_{x=Py}=ky_1^2$,而由 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}$ 知,$y_1=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$,即得
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)^2.$$
若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩为 2,符号差为零,则必存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$.使得
$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\big|_{x=Py}=y_1^2-y_2^2=(y_1+y_2)(y_1-y_2),$$
其中 y_1 与 y_2 均为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性函数(一次齐式).于是,可设
$$y_1+y_2=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n,$$
$$y_1-y_2=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n.$$
即知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可表成两个一次齐式之乘积.

例 7　用非退化线性替换化下列二次型为标准形,并用矩阵验算所得结果:

(1) $x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$;

(2) $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$;

(3) $\sum\limits_{\lambda=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2,\overline{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

解　(1)是无平方项型.故设

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_{2n}, \\ x_2 = y_2 + y_{2n-1}, \\ \quad \vdots \\ x_n = y_n + y_{n+1}, \\ x_{n-1} = y_n - y_{n+1}, \\ \quad \vdots \\ x_{2n-1} = y_2 - y_{2n-1}, \\ x_{2n} = y_1 - y_{2n}, \end{cases}$$

得 $$C = \begin{bmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & & & & -1 \end{bmatrix},$$

代入 f 即得 f 的一个标准形

$$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - y_{n+2}^2 - \cdots - y_{2n}^2.$$

可以验证 $$C'AC = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

(2) 若令 $y_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{2}, y_2 = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{2}$,便可得

$$y_1^2 - y_2^2 = x_1 x_2 + x_2 x_3.$$

讨论 n 的奇偶与 f 标准形关系.

① 当 n 为奇数时,作变换

$$
\begin{cases}
y_i=\dfrac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2}, \\
y_{i+1}=\dfrac{x_i-x_{i+1}+x_{i+2}}{2} \quad (i=1,3,5,\cdots,n-2), \\
y_n=x_n
\end{cases}
$$

得 $$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2.$$

当 $n=4k+1$ 时，

$$
C=\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\
 & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & 1 & -1 & 0 \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}.
$$

当 $n=4k+3$ 时，

$$
C=\begin{bmatrix}
1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 & -1 \\
1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 & 1 \\
 & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & 1 & -1 & 0 \\
 & & & & & & & 1
\end{bmatrix}.
$$

可以验证，总有

$$
C'AC=\begin{bmatrix}
1 & & & & & & & \\
 & -1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & -1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & -1 & \\
 & & & & & & & 0
\end{bmatrix}.
$$

② 当 n 为偶数时，作变换

$$\begin{cases} y_i=\dfrac{x_i+x_{i+1}+x_{i+2}}{2}, \\ y_{i+1}=\dfrac{x_i-x_{i+1}+x_{i+2}}{2}, \\ y_{n-1}=\dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}, \\ y_n=\dfrac{x_{n-1}-x_n}{2} \end{cases} \quad (i=1,3,5,\cdots,n-3),$$

得 $$f=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2.$$

当 $n=4k$ 时，$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

当 $n=4k+2$ 时，$$C=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \\ & & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

可以验证，总有 $$C'AC=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix}.$$

(3) 用配方法，将 f 配成

$$f=\left(x_1+\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}x_j\right)^2+\frac{3}{4}\left(x_2+\frac{1}{3}\sum_{j=3}^{n}x_j\right)^2+\cdots+\frac{n}{2(n-1)}\left(x_{n-1}+\frac{1}{n}x_n\right)^2+\frac{n+1}{2n}x_n^2.$$

令

$$\begin{cases} y_1= x_1+\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=2}^{n}x_j, \\ y_2= x_2+\dfrac{1}{3}\displaystyle\sum_{j=3}^{n}x_j, \\ \quad\vdots \\ y_{n-1}=x_{n-1}+\dfrac{1}{n}x_n, \\ y_n= x_n, \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1 =y_1-\dfrac{1}{2}y_2-\dfrac{1}{3}y_3-\cdots-\dfrac{1}{n}y_n, \\ x_2 = y_2-\dfrac{1}{3}y_3-\cdots-\dfrac{1}{n}y_n, \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = y_{n-1}-\dfrac{1}{n}y_n, \\ x_n = y_n, \end{cases}$$

则

$$f=y_1^2+\frac{3}{4}y_2^2+\cdots+\frac{n}{2(n-1)}y_{n-1}^2+\frac{n+1}{2n}y_n^2,$$

替换矩阵

$$C=\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/3 & \cdots & -1/n-1 & -1/n \\ & 1 & -1/3 & \cdots & -1/n-1 & -1/n \\ & & 1 & \cdots & -1/n-1 & -1/n \\ & & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 1 & -1/n \end{bmatrix}.$$

经验证 $C'AC=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & 3/4 & & & & \\ & & 4/6 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n/2(n-1) & \\ & & & & & (n+1)/2n\end{bmatrix}$.

(4) 作线性替换

$$\begin{cases}y_1 &= x_1-\bar{x}, \\ y_2 &= x_2-\bar{x}, \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= x_{n-1}-\bar{x}, \\ y_n &= x_n,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_1 &= 2y_1+\sum\limits_{i=2}^{n} y_i, \\ x_2 &= y_1+2y_2+\sum\limits_{i=3}^{n} y_i, \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \sum\limits_{i=1}^{n-2} y_i+2y_{n-1}+y_n, \\ x_n &= y_n,\end{cases}$$

则 $f=\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2+\left(y_n-\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2=\sum\limits_{i=1}^{n-1} y_i^2+\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^2$

$$=2\left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2+\sum_{l\leqslant i<j\leqslant n-1} y_i y_j\right. \quad \text{(由题(3))}$$

$$=2z_1^2+\frac{3}{2}z_2^2+\cdots+\frac{n}{n-1}z_{n-1}^2,$$

替换矩阵 $C=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$.

例 8 设实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2,$$

证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{bmatrix}.$$

证 令 $y_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\ (i=1,2,\cdots,s)$，记$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，故

$$f=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}.$$

于是，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩等于 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$ 的秩，而秩$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$=秩$(\boldsymbol{A})$. 所以，秩$(f(x_1,x_2,\cdots,x_n))$=秩$(\boldsymbol{A})$.

(因为对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 两端左乘 $\boldsymbol{A}'$，得 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，故 $W_A\subseteq W_{A'A}$；又对 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$ 两端左乘 $\boldsymbol{x}'$，得 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则由$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=0\Longrightarrow y_1=y_2=\cdots=y_n=0\Longrightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$，从而 $W_{A'A}\subseteq W_A$. 综上可知 $W_A=W_{A'A}$. 所以，秩$(\boldsymbol{A})$=秩$(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})$.)

例 9 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}$是一对称矩阵，且$|\boldsymbol{A}_{11}|\neq0$，证明：存在 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{X}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$使得 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & *\end{bmatrix}$，式中 * 表示一个级数与 $\boldsymbol{A}_{22}$相同的矩阵.

证 因为 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$，所以$\boldsymbol{A}_{12}'=\boldsymbol{A}_{21}$，则取分块初等方阵 $\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$，有

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22}-A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ O & E \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22}-A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix}$$（其中 $*=A_{22}-A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12}$）.

例 10 设 A 是反对称矩阵，证明：A 合同于矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

证 对 A 的级数 n 使用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，有 $A=(0)$ 合同于 (0)，命题成立.

当 $n=2$ 时，$A=\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}$. 若 $a_{12}=0$，则 A 合同于零矩阵，命题成立；若 $a_{12}\neq 0$，对 A 的第 1 行与第 1 列均乘以 a_{12}^{-1}，得 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，即相当于对 A 作合同变换：

$$\begin{bmatrix} 1/a_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/a_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

设对 $n\leqslant k$，命题成立.

对 $n=k+1$ 情形. 若

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1k} & a_{1\,k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{1k} & \cdots & 0 & a_{k\,k+1} \\ -a_{1\,k+1} & \cdots & -a_{k\,k+1} & 0 \end{bmatrix}$$

中最后一行元素全为零,则由归纳假设命题成立.否则,经过行列的同样对换,使 $a_{k\,k+1}\neq 0$,再将最后一行与一列都乘以 $1/a_{k\,k+1}$,将 $\boldsymbol{A}$ 化为

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1k} & b \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{1k} & \cdots & 0 & 1 \\ -b_1 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{相同对换}]{\text{行列}}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{1\,k-1} & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ -b_{1\,k-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

则由归纳假设 $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & b_{1\,k-1} \\ \vdots & & \vdots \\ -b_{1\,k-1} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$

的矩阵合同,从而 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

合同. 将最后两行两列对换到前面就证得命题在 $n=k+1$ 时也成立,所以对任何反对称矩阵命题都成立.

例 11 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,证明:存在一正实数 c,使对任一个实 n 维向量 $\boldsymbol{x}$,都有 $|\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\leqslant c\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}$.

证 $|\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|=\left|\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right|\leqslant\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}||x_i||x_j|$.

记 $a=\max_{i,j}|a_{ij}|$,再利用 $|x_i||x_j|\leqslant\frac{x_i^2+x_j^2}{2}$,得

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}| &\leqslant \sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}||x_i||x_j|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a|x_i||x_j| \\
&\leqslant a\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i^2+x_j^2}{2} \\
&=\frac{a}{2}\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right) \\
&=an\sum_{i=1}^{n}x_i^2=c\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\ (\text{其中 } c=na).
\end{aligned}
$$

例 12 若实二次型 f 与 $-f$ 能够通过可逆线性替换互相转化,问:f 的秩与其标准形的正、负项的个数有什么特征?

解 若 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则 $-f$ 的矩阵为 $-\boldsymbol{A}$,必存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$,使得

$$
\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&-1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&-1&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.
$$

同时,又存在可逆线性替换使得 f 化为 $-f$,即有 $\boldsymbol{D}$ 可逆,使得

$$D'C'ACD=\begin{bmatrix}-1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & -1 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0\end{bmatrix}=-\boldsymbol{B}.$$

故秩$(f)=2p$,即 f 的秩为偶数,且正、负项个数相等.

第二节　唯一性与正定二次型

主要内容

1. 定理 1　任意一个复系数的二次型,经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形,且规范形是唯一的.

任一复数对称矩阵合同于一个形式为

$$\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}$$

的对角矩阵.两个复数对称矩阵合同的充分必要条件是它们的秩相等.

复二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的规范形为

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2;$$

实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的规范形为

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2.$$

惯性定理 任意一个实数域上的二次型，经过一适当的非退化线性替换可以变成规范形，且规范形是唯一的.

2. 定义 1 在实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的规范形中，正平方项的个数 p 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的**正惯性指数**，负平方项的个数 $q=r-p$ 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的**负惯性指数**；它们的差 $p-(r-p)=2p-r$ 称为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的**符号差**.

3. 定理 2 任一复对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都合同于一个下述形式的对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

其中对角线上 1 的个数 r 等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

任一实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都合同于一个下述形式的对角矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix},$$

其中对角线上 1 的个数 p 与 -1 的个数 $r-p$[$(r=$秩$(\boldsymbol{A})$]都是唯一确定的，分别称为 $\boldsymbol{A}$ 的正、负惯性指数，它们的差 $2p-r$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的符号差.

4. **定义 2** 若对任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) > 0$，则称实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为**正定的**.

5. **定理 3** n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n.

6. **定义 3** 若二次型 $X'AX$ 正定，则实对称矩阵 A 称为**正定的**.

推论 正定矩阵 A 的行列式大于零.

7. **定义 4** 子式

$$P_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

称为矩阵 $A=(a_{ij})_{nn}$ 的**顺序主子式**.

8. **定理 4** 实二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = X'AX$$

是正定的充分必要条件是矩阵 A 的顺序主子式全大于零.

9. **定义 5** 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一实二次型，对于任意一组不全为零的实数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，如果都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) < 0$，则称为$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$**负定的**；如果都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \geqslant 0$，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是**半正定的**；如果都有 $f(c_1, c_2, \cdots, c_n) \leqslant 0$，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是**半负定的**；如果它既不是半正定的又不是半负定的，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是**不定的**.

当 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 负定时，$-f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 正定.

10. **定理 5** 对于实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$，其中 A 是实对称的，下列条件等价：

(1) $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是半正定的；

(2) 它的正惯性指数与秩相等；

(3) 有可逆实矩阵 C，使

$$C'AC=\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix},$$

其中 $d_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$；

(4) 有实矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{C}$；

(5) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式都大于或等于零.

(行指标与列指标相同的子式称为主子式.)

疑 难 解 析

1. 怎样认识惯性定理?

答 对于秩为 r 的实二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，可以用不同的实可逆线性变换化为标准形，所得标准形因为所用方法、步骤不同可能不同. 但是，惯性定理指出：二次型的标准形中非零平方项的个数由秩 r 唯一确定，且正项个数(正惯性指数)与负项个数(负惯性指数)也唯一确定，与所作可逆线性变换无关. 所以，惯性定理反映了实二次型的本质特征.

二次型化为标准形后，通过重新安排变量次序可化为

$$d_1y_1^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2,$$

式中 p 为正惯性指数.

再作线性替换

$$\begin{cases} y_i=z_i/\sqrt{d_i} & (i=1,2,\cdots,r), \\ y_j=z_j & (j=r,r+1,\cdots,n), \end{cases}$$

化标准形为规范形

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2.$$

转化为矩阵的相应结果是：任何一个秩为 r 的实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于一个形如 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}$ 的对角矩阵.

2. 怎样判定一个 n 元实二次型为正定的?

答 除了定义以外,下列条件之一都是实二次型 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 为正定的充要条件:

(1) f 的正惯性指数为 n(或 f 标准形的 n 个系数全为正);

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征值都大于零(见第七章);

(3) $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式都大于零;

(4) $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 合同.

若 $f=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 负定,则 $-f=\boldsymbol{X}'(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}$ 一定正定,所以,判定 f 是负定的方法是类似的.

但是,在判定 f 是半正定的时应注意:$\boldsymbol{A}$ 的所有主子式均大于或等于零,而不只是判定正定时只要求判别顺序主子式.

考察具体问题时,对二次型或实对称矩阵,习惯用顺序主子式来判断;对抽象的二次型或实对称矩阵,则应灵活应用不同方法.对数字型的实对称矩阵,首先观察主对角线上元素,若元素有正有负,则它一定是不定的;若有零元,则一定不是正定的也不是负定的(因为正定或负定时,$r=n$).

方法、技巧与典型例题分析

掌握判别二次型正定的具体方法,能利用定理与等价命题讨论与矩阵及二次型正定性有关的命题.

例 1 判别下列二次型是否正定:

(1) $99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$;

(2) $10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

(4) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

解 (1) 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}99 & -6 & 24\\ -6 & 130 & -30\\ 24 & -30 & 71\end{bmatrix}$,其各阶顺序主子式

$$D_1=|99|=99>0,\ D_2=\begin{vmatrix}99 & -6\\ -6 & 130\end{vmatrix}>0,\ D_3=|\boldsymbol{A}|>0.$$

所以,二次型是正定的.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}10 & 4 & 12\\ 4 & 2 & -14\\ 12 & -14 & 3\end{bmatrix}$,其各阶顺序主子式

$$D_1=10>0,\ D_2=4>0,\ D_3=-3588<0.$$

所以,二次型是非正定的.

(3) 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & \cdots & 1/2\\ 1/2 & 1 & \cdots & 1/2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1/2 & 1/2 & \cdots & 1\end{bmatrix}$,各阶顺序主子式

$$D_m=\frac{1}{2^m}\begin{vmatrix}2 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 2\end{vmatrix}_m$$

$$=\frac{1}{2^m}\left(|\boldsymbol{E}_m|+\left|\begin{bmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{bmatrix}[1,1,\cdots,1]\right|\right)$$

$$=\frac{m+1}{2^m}\quad(m=1,2,\cdots,n),$$

所以,二次型是正定的.

(4) 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & 1/2\\ & & & 1/2 & 1\end{bmatrix}$,各阶顺序主子式

$$D_m=\frac{1}{2^m}\begin{vmatrix}2 & 1 & & & \\ 1 & 2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 2 & 1 \\ & & & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{m+1}{2^m}>0\quad(m=1,2,\cdots,n),$$

所以，二次型是正定的.

例 2 将第一节例 1 中的二次型化为规范形，分实系数、复系数两种情况，并写出所作的非退化线性替换.

解 (1) 因为 $f=-z_1^2+4z_2^2+z_3^2$，令

$$\begin{cases}z_1=t_3,\\ z_2=t_2/2,\\ z_3=t_1,\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=t_1/2+t_2/2+t_3/2,\\ x_2=t_1/2-t_2/2+t_3/2,\\ x_3=t_1,\end{cases}$$

则实二次型的规范形为 $f=t_1^2+t_2^2-t_3^2$. 令

$$\begin{cases}t_1=w_1,\\ t_2=w_2,\\ t_3=\mathrm{i}w_3.\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=w_1/2+w_2/2+\mathrm{i}w_3/2,\\ x_2=w_1/2-w_2/2+\mathrm{i}w_3/2,\\ x_3=w_1,\end{cases}$$

则复二次型的规范形为 $f=w_1^2+w_2^2+w_3^2$.

(2) 因为 $f=y_1^2+y_2^2$ 已是实(复)二次型的规范形.

(3) 因为 $f=y_1^2-y_2^2$ 已是实二次型的规范形，令

$$\begin{cases}y_1=z_1,\\ y_2=\mathrm{i}z_2,\\ y_3=z_3,\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x_1=z_1+\mathrm{i}z_2/2-3z_3/2,\\ x_2=\qquad\mathrm{i}z_2/2-\ z_3/2,\\ x_3=\qquad\qquad\qquad z_3\ .\end{cases}$$

得复二次型规范形为 $f=z_1^2+z_2^2$.

(4) 因为 $f=8z_1^2+2z_2^2-2z_3^2-8z_4^2$，令

$$\begin{cases}z_1=\sqrt{2}w_1/4,\\ z_2=\sqrt{2}w_2/2,\\ z_3=\sqrt{2}w_3/2,\\ z_4=\sqrt{2}w_4/4,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=\sqrt{2}w_1/4-5\sqrt{2}w_2/8-3\sqrt{2}w_3/8+\sqrt{2}w_4/4, \\ x_2= \qquad\qquad \sqrt{2}w_2/2+\sqrt{2}w_3/2, \\ x_3= \qquad\qquad \sqrt{2}w_2/2-\sqrt{2}w_3/2, \\ x_4=\sqrt{2}w_1/2 \qquad\qquad\qquad -\sqrt{2}w_4/4. \end{cases}$$

得实二次型的规范形为 $f=w_1^2+w_2^2-w_3^2-w_4^2$. 令

$$\begin{cases} w_1=u_1, \\ w_2=u_2, \\ w_3=\mathrm{i}u_3, \\ w_4=\mathrm{i}u_4, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}u_1-\frac{5\sqrt{2}}{8}u_2-\frac{3\sqrt{2}}{8}\mathrm{i}u_3-\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}u_4, \\ x_2= \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}u_2+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}u_3, \\ x= \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}u_2-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}u_3, \\ x_4=\frac{\sqrt{2}}{2}u_1 \qquad\qquad -\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{i}u_4. \end{cases}$$

得复二次型的规范形为 $f=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2$.

(5) 因为 $f=z_1^2-z_2^2-3z_3^2-z_4^2$，令

$$\begin{cases} z_1=t_1, \\ z_2=t_2, \\ z_3=\frac{\sqrt{3}}{3}t_3, \\ z_4=t_4, \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_1=t_1+t_2-\frac{2\sqrt{3}}{3}t_3, \\ x_2=t_1-t_2-\frac{2\sqrt{3}}{3}t_3, \\ x_3= \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}t_3+t_4, \\ x_4= \qquad \frac{\sqrt{3}}{3}t_3-t_4. \end{cases}$$

得实二次型的规范形为 $f=t_1^2-t_2^2-t_3^2-t_4^2$. 令

$$\begin{cases} t_1 = w_1, \\ t_2 = \mathrm{i}w_2, \\ t_3 = \mathrm{i}w_3, \\ t_4 = \mathrm{i}w_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = w_1 + \mathrm{i}w_2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}w_3, \\ x_2 = w_1 - \mathrm{i}w_2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}w_3, \\ x_4 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}w_3 + \mathrm{i}w_4, \\ x_5 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}w_3 - \mathrm{i}w_4. \end{cases}$$

得复二次型的规范形为 $f = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2$.

(6)因为 $f = y_1^2 - 2y_2^2 + \dfrac{1}{2}y_3^2$,令

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}z_3, \\ y_3 = \sqrt{2}z_2, \\ y_4 = z_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1 + \sqrt{2}z_2 - \sqrt{2}z_3 - z_4, \\ x_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}z_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}z_3 + z_4, \\ x_3 = \sqrt{2}z_2 - z_4, \\ x_4 = z_4. \end{cases}$$

得实二次型的规范形为 $f = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$. 令

$$\begin{cases} z_1 = t_1, \\ z_2 = t_2, \\ z_3 = \mathrm{i}t_3, \\ z_4 = t_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = t_1 + \sqrt{2}t_2 - \sqrt{2}\mathrm{i}t_3 - t_4, \\ x_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}t_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}t_3 + t_4, \\ x_3 = \sqrt{2}t_2 - t_4, \\ x_4 = t_4. \end{cases}$$

得复二次型的规范形为 $f = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$.

(7) $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$ 已为实二次型的规范形,令

$$\begin{cases} y_1 = z_1, \\ y_2 = z_2, \\ y_3 = z_3, \\ y_4 = \mathrm{i}z_4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = z_1, \\ x_2 = z_2 - \mathrm{i}z_4, \\ x_3 = -z_1 + \mathrm{i}z_4, \\ x_4 = z_1 + z_3 - \mathrm{i}z_4. \end{cases}$$

得复二次型的规范形为 $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$.

例 3 t 取何值时，下列二次型是正定的：

(1) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

(2) $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

解 求出各级顺序主子式，讨论 t 为何值时，各阶顺序主子式皆大于零.

(1) $A=\begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$，各阶顺序主子式为

$$D_1=1>0,\quad D_2=1-t^2>0,\quad D_3=-t(4+5t)>0,$$

则当 $-4/5<t<0$ 时，$f(x_1,x_2,x_3)$ 是正定的.

(2) $A=\begin{bmatrix} 1 & t & 5 \\ t & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$，各阶顺序主子式为

$$D_1=1>0,\quad D_2=4-t^2>0,\quad D_3=30t-105-t^2,$$

则当 t 为任何值时都无解，故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 是非正定的.

例 4 在 $f(x_1,x_2,x_3)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 中，

(1) λ 取何值时，f 是正定的？

(2) λ 取何值时，f 是负定的？

(3) 当 $\lambda=2$ 和 $\lambda=-1$ 时，f 是什么类型的？

解 因为 $A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{bmatrix}$，其各阶顺序主子式

$$D_1=\lambda,\quad D_2=\lambda^2-1,\quad D_3=(\lambda-2)(\lambda+1)^3.$$

所以(1) 当 $\lambda>2$ 时，各阶顺序主子式大于零，f 是正定的；

(2) 当 $\lambda<-1$ 时，各阶顺序主子式小于零，f 是负定的；

(3) 当 $\lambda=2$ 时，$D_1>0,D_2>0,D_3=0$，f 是半正定的；

当 $\lambda=-1$ 时，$D_1<0,D_2=0,D_3=0$，f 是半负定的.

例 5 证明：若 A 是正定矩阵，则 A 的主子式全大于零. 所谓

主子式是指行指标与列指标相同的子式.

证 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_m$是正定矩阵,其任一$m$级主子式为

$$|\boldsymbol{A}^{(m)}|=\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & \cdots & a_{i_1i_m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_mi_1} & \cdots & a_{i_mi_m} \end{vmatrix}.$$

对任意$\boldsymbol{y}_0=(b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_m})'\neq\boldsymbol{0}$,作$\boldsymbol{x}_0=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'$,其中

$$c_i=\begin{cases} b_i & (\text{当 } i=i_1,i_2,\cdots,i_m \text{ 时}), \\ 0 & (\text{其它}). \end{cases}$$

因为$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$正定,故有$\boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{A}^{(m)}\boldsymbol{y}_0>0$. 于是,由$\boldsymbol{y}_0$的任意性知,$\boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{A}^{(m)}\boldsymbol{y}_0$是正定二次型,故$\boldsymbol{A}$的主子式$|\boldsymbol{A}^{(m)}|>0$.

例 6 设$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵,证明:当实数t充分大之后,$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$是正定矩阵.

证 因为$\boldsymbol{A}$是实对称矩阵,则对任意实数t,$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$仍是实对称矩阵.

设$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式为$f_1(t),f_2(t),\cdots,f_n(t)$,则它们都是首项系数为1的实系数多项式. 由数学分析知,当t充分大时,$f_i(t)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 所以当t充分大时,$t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$是正定的.

例 7 证明:若$\boldsymbol{A}$是正定矩阵,则$\boldsymbol{A}^{-1}$也是正定矩阵.

证 因为$\boldsymbol{A}$正定,所以对任$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,有$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$,故存在可逆线性变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$,使得

$$0<\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y},$$

所以,$\boldsymbol{A}^{-1}$为正定矩阵.

例 8 设$\boldsymbol{A}$为n阶实对称矩阵,且$|\boldsymbol{A}|<0$. 证明:必存在实n维向量$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,使$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$.

证 用反证法. 若对任$\boldsymbol{x}$,均有$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$,则$\boldsymbol{A}$是半正定的,因而$\boldsymbol{A}$的所有主子式都不小于零,这与$|\boldsymbol{A}|<0$矛盾. 所以,必有$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,使得$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}<0$.

例 9 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

证 由题设知，对任 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，有 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0,\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$，则

$$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}>0$$

对任 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ 成立. 故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

例 10 证明：二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

证 充分性 设 f 的秩与正惯性指数相等，均为 r，则负惯性指数为零. 于是 f 可经满秩线性替换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 变成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2,$$

从而，对任一组实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 可得 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{x}$，使得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2\geqslant 0,$$

即 f 是半正定的.

必要性 设 f 是半正定的，则 f 的负惯性指数必为零. 否则，f 可经非退化线性替换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 化为

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2\quad(p<r).$$

则当 $y_r=1$ 而其余 $y_i=0$ 时，由 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 可得相应值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-1<0$. 这与 f 是半正定的相矛盾. 所以，f 的正惯性指数必与秩相等.

例 11 证明 $n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 是半正定的.

证 利用等式 $(n-1)\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^2+x_j^2)$，得

$$\begin{aligned}f&=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2x_ix_j\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^2+x_j^2)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2x_ix_j\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^2+x_j^2-2x_ix_j)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i-x_j)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

故 f 是半正定的.

例 12 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是一实二次型，若有实 n

维向量 x_1,x_2，使 $x_1'Ax_1>0,x_2'Ax_2<0$，证明：必存在实 n 维向量 $x_0\neq 0$，使 $x'_0Ax_0=0$.

证一 因为对任 $\lambda\in\mathbf{R}$ 有

$$(x_1+\lambda x_2)'A(x_1+\lambda x_2)=x_1'Ax_1+2\lambda(x_1'Ax_2)+\lambda^2x_2'Ax_2,$$

上式右端是一关于 λ 的二次三项式，其判别式为

$$\Delta=4(x_1'Ax_2)^2-4(x_2'Ax_2)(x_1'Ax_1).$$

由题设知 $\Delta>0$，所以有两个不同的实根 λ_1,λ_2，从而 $x_1+\lambda_1x_2\neq x_2+\lambda_2x_2$. 取 x_0 为其中不等于零的一个，则由上面讨论知 $x_0'Ax_0=0$.

证二 设 A 的秩为 r，可作实的非退化线性替换 $x=Cy$，则 f 化为

$$f=x'Ax=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2.$$

由题设，存在 x_1,x_2，使 $x_1'Ax_1>0,x_2'Ax_2<0$，则 $p>0,q>0$，有 $p>q,p=q,p<q$ 三种情形.

当 $p>q$ 时，取

$$y_0=(\underbrace{1,\cdots,1}_{q\text{个}},\underbrace{0,\cdots,0}_{p\text{个}},\underbrace{1,\cdots,1}_{p+q\text{个}},0,\cdots,0)'$$

则由 $x_0=Cy_0$ 得非零向量 x_0，使

$$f=x_0'Ax_0=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2=0.$$

$p=q,p<q$ 情形类似可证.

例 13 A 是一个实矩阵，证明：秩$(A'A)=$秩(A).

证 见第一节例 8 括号内.

例 14 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$，其中 $l_i(i=1,2,\cdots,p+q)$ 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐次式. 证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数不大于 p，负惯性指数不大于 q.

证 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的正惯性指数为 p'，负惯性指数为 q'. 并设 f 经非退化线性替换 $x=Cy$ 化为规范形

$$f=y_1^2+\cdots+y_{p'}^2-y_{p'+1}^2-\cdots-y_{p'+q'}^2. \quad ①$$

又对题设中表达式，设 $C^{-1}=(c_{ij})$，由 $y=C^{-1}x$ 知

$$y_i=c_{i_1}x_1+c_{i_2}x_2+\cdots+c_{i_n}x_n,\ 1\leqslant i\leqslant n.$$

又题设 l_i 也是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一次齐次式，所以若 $p'>p$，令 $y'_{p+1}=\cdots=y_n=0, l_1=\cdots=l_p=0$，则 n 个未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases}y_i=c_{i_1}x_1+c_{i_2}x_2+\cdots+c_{i_n}x_n=0,\ p'+1\leqslant i\leqslant n\\ l_1=0,\\ \quad\vdots\\ l_p=0\end{cases}$$

的方程的个数为 $p+(n-p')<n$，所以方程组必有非零解 x^*. 代入题设表达式后得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant 0$，而代入式①得

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$，两者矛盾. 从而必有 $p'\leqslant p$.

类似可证 $q'\leqslant q$.

例 15 主对角线上全是 1 的上三角矩阵称为特殊上三角矩阵.

(1) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一对称矩阵，$\boldsymbol{T}$ 为特殊上三角矩阵，而 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应顺序主子式有相同的值；

(2) 证明：若对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全不为零，则一定有一特殊上三角矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形.

(3) 利用以上结果证明：实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式全大于零.

证 (1)将 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{T}$ 分块，式中 $\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{T}_k$ 为 k $(k=1,2,\cdots,n)$阶子块，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_k & \boldsymbol{F}_k\\ \boldsymbol{C}_k & \boldsymbol{D}_k\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}_k & \boldsymbol{U}_k\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{S}_k\end{bmatrix},$$

式中 $\boldsymbol{T}_k$ 与 $\boldsymbol{T}'_k$ 分别是特殊上、下三角矩阵，有

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{T}'_k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{T}_k & *\\ * & *\end{bmatrix}.$$

所以，由$|\boldsymbol{T}_k|=|\boldsymbol{T}'_k|=1$知，$\boldsymbol{B}$的$k$阶顺序主子式

$$|\boldsymbol{B}_k|=|\boldsymbol{T}'_k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{T}_k|=|\boldsymbol{A}_k|,$$

从而得出$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的对应顺序主子式的值都相同.

(2) 对n用数学归纳法证明.

当$n=1$时，命题显然成立.

设对$n-1$，命题成立. 在n时，将$\boldsymbol{A}$分块成$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}' & a_{nn}\end{bmatrix}$，式中$\boldsymbol{\alpha}'=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n\,n-1})$，且$|\boldsymbol{A}_{n-1}|$是$\boldsymbol{A}$的$n-1$阶顺序主子式. 故知$\boldsymbol{A}_{n-1}$可逆. 再令$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}_1$是上三角特殊矩阵，且有$\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & d_n\end{bmatrix}$，$d_n=a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$. $\boldsymbol{A}_{n-1}$的顺序主子式即$\boldsymbol{A}$的前$n-1$个顺序主子式，故全不为零，于是，因为在$n-1$时命题成立，则必有特殊上三角矩阵$\boldsymbol{P}_2$，使

$$\boldsymbol{P}'_2\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_{n-1}\end{bmatrix}.$$

令$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}$，则$\boldsymbol{P}$是特殊上三角矩阵，且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}'_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{P}'_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}'_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{n-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}'_2\boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{P}_2 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & d_n\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_{n-1} & \\ & & & & d_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由题(1)知 $\boldsymbol{P'AP}$ 的顺序主子式与 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式有相同的值. 由于 $\boldsymbol{P'AP}$ 的顺序主子式为 $d_1,d_2,\cdots,d_k$ $(k=1,2,\cdots,n)$，所以 $d_1d_2\cdots d_k=|\boldsymbol{A}_k|$. 因为 $|\boldsymbol{A}_k|\neq0$，所以 d_i 均不为零，且有

$$d_1=|\boldsymbol{A}_1|,\ d_k=|\boldsymbol{A}_k|/|\boldsymbol{A}_{k-1}|\quad (k=2,3,\cdots,r).$$

(3) 由题(2) 知，存在特殊上三角矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T'AT}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

再由题(1)知，$\boldsymbol{B}$ 的所有顺序主子式与 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式有相同的值，故

$$\lambda_1=a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\Longrightarrow\lambda_2>0,\cdots$$

$$\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1i}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{ii}\end{vmatrix}>0,\text{有 }\lambda_i>0\quad (i=1,2,\cdots,n).$$

因为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ty}$ 是非退化线性替换，且

$$\boldsymbol{x'Ax}=\boldsymbol{y'T'ATy}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均大于零，所以 $\boldsymbol{x'Ax}$ 是正定的.

例 16 证明：

(1) 若 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ $(a_{ij}=a_{ji})$ 是正定二次型，则

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

是负定二次型.

(2) 若 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}P_{n-1}$，这里 P_{n-1} 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $n-1$

阶顺序主子式.

(3) 若 $\mathbf{A}$ 是正定矩阵,则 $|\mathbf{A}|\leqslant a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$.

(4) 若 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})$ 是 n 阶实可逆矩阵,则

$$|\boldsymbol{T}|^2\leqslant \prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{ni}^2).$$

证 (1)设 $\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$,则

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}' & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{O} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{Y}' & -\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y}\end{pmatrix}.$$

对上式两端取行列式,得

$$f=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Y}' & \boldsymbol{O}\end{vmatrix}=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{Y}'\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{Y},$$

所以,知 f 是一个二次型.作非退化线性替换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}$,式中 $\boldsymbol{Z}=(z_1,z_2,\cdots,z_n)'$,则

$$f=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{A}^{-1})\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z}=-|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Z},$$

因为 $\mathbf{A}$ 是正定的,知 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是负定二次型.

(2) $$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n}\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}\text{(将第 } n \text{ 列拆项)}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & a_{n-1\,n}\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & 0\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n-1\,1} & \cdots & a_{n-1\,n-1} & 0\\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=f_{n-1}(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{n-1\,n})+a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|.$$

因为 $\mathbf{A}$ 是正定的,所以 $\mathbf{A}_{n-1}$ 也是正定的.从而由题(1) 知,f 是负

定的，即 $f_{n-1}(a_{1n},a_{2n},\cdots,a_{n-1\,n})\leqslant 0$. 于是，$|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|$.

当 $a_{1n}=a_{2n}=\cdots=a_{n-1\,n}=0$ 时，$|\boldsymbol{A}|=a_{nn}P_{n-1}$. 所以，总有 $|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}P_{n-1}$.

(3) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，所以 $|\boldsymbol{A}_1|,|\boldsymbol{A}_2|,\cdots,|\boldsymbol{A}_{n-1}|$ 对应的方阵是正定的，故由题(2) 得

$$|\boldsymbol{A}|\leqslant a_{nn}|\boldsymbol{A}_{n-1}|\leqslant a_{nn}a_{n-1\,n-1}|\boldsymbol{A}_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant a_{nn}\,a_{n-1\,n-1}\cdots\,a_{22}\,a_{11}.$$

(4) 作变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$，则 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}'\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{y}$ 是正定二次型，从而 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}$ 是正定矩阵. 又

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}t_{11} & \cdots & t_{n1}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{1n} & \cdots & t_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{n1} & \cdots & t_{nn}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{n}t_{i1}^2 & & & \\ & \sum\limits_{i=1}^{n}t_{i2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum\limits_{i=1}^{n}t_{in}^2\end{bmatrix}.$$

由题 (3) 知 $|\boldsymbol{T}^2|=|\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}|\leqslant\prod\limits_{j=1}^{n}(t_{1j}^2+t_{2j}^2+\cdots+t_{nj}^2)$.

例 17 证明：实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的一切主子式全大于或等于零(所谓 k 阶主子式是指形为

$$\begin{bmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{bmatrix}$$

的 k 阶子式 (其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$)).

证 必要性 设 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的. 令 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，且

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_k=\begin{bmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \cdots & a_{i_k i_k} \end{bmatrix},$$

并设矩阵为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_k$ 的二次型分别为 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 与 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}$.

对任意的 $\boldsymbol{x}_0=(b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_m})'\neq\boldsymbol{0}$,存在 $\boldsymbol{y}_0=(c_1,c_2,\cdots,c_n)'\neq\boldsymbol{0}$,其中

$$c_k=\begin{cases} b_k, & (k=i_1,i_2,\cdots,i_m), \\ 0, & (\text{其它}). \end{cases}$$

则由 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的 $\Longrightarrow \boldsymbol{y}_0'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_0\geqslant 0\Longrightarrow \boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_0\geqslant 0$,知 $\boldsymbol{x}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}$ 是半正定的,故必存在实满秩矩阵 $\boldsymbol{T}_k$,使得

$$\boldsymbol{T}'_k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{T}_k=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix},$$

式中 $\lambda_i\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,n)$. 从而

$$|\boldsymbol{T}_k'\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{T}_k|=|\boldsymbol{A}_k||\boldsymbol{T}_k|^2=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\geqslant 0.$$

因为 $$|\boldsymbol{T}_k|^2>0\Longrightarrow|\boldsymbol{A}_k|>0.$$

充分性　设 $\boldsymbol{A}$ 的主子式大于或等于零. 令

$$\boldsymbol{B}_m=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}\quad(m=1,2,\cdots,m),$$

则 $\boldsymbol{B}_m$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 m 个顺序主子式对应的矩阵.

$$|\lambda\boldsymbol{E}_m+\boldsymbol{B}_m|=\begin{vmatrix} \lambda+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & \lambda+a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^m+P_1\lambda^{m-1}+\cdots+P_{m-1}\lambda+P_m.$$

式中 P_i 为 $\boldsymbol{B}_m$ 中一切 i 阶主子式的和. 由题设知,$\boldsymbol{A}$ 的一切主子式

均不小于零，故 $P_i \geqslant 0$. 从而，当 $\lambda > 0$ 时，$|\lambda \boldsymbol{E}_m + \boldsymbol{B}_m| > 0$，即当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 总是正定的.

若 $\boldsymbol{A}$ 不是半正定的，则有 $\boldsymbol{x}_0 = (a_1, a_2, \cdots, a_n)' \neq \boldsymbol{0}$，使 $\boldsymbol{x}_0' \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_0 = -c < 0$. 于是，令

$$\lambda = \frac{c}{\boldsymbol{x}_0' \boldsymbol{x}_0} = \frac{c}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} > 0,$$

则
$$\boldsymbol{x}_0'(\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}) \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0' \lambda \boldsymbol{E} \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_0' \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_0 = c - c = 0.$$

这与 $\lambda > 0$ 时 $\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 为正定矩阵矛盾. 故 $\boldsymbol{A}$ 必是半正定的.

例 18 设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶实对称矩阵且正定，$\boldsymbol{B}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，证明：$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 为正定的充分必要条件是秩$(\boldsymbol{B}) = n$.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是 $n \times n$ 矩阵，所以只能用定义来证明.

充分性 设秩$(\boldsymbol{B}) = n$，因为 $(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{B}')' = \boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$，所以 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵. 又对于任意的 n 维列向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，考虑 $\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})$，由于秩$(\boldsymbol{B}) = n$，所以齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解. 因而，由 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$. 因为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 是 $m \times 1$ 矩阵，故当 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ 时，$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ 是 m 维列向量，而 $\boldsymbol{A}$ 是 m 维矩阵，于是

$$(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) > 0 \Rightarrow \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} > 0.$$

即知 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是正定的.

必要性 设 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵，则对任意 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，恒有

$$\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{B}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} > 0 \Rightarrow (\boldsymbol{B}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) > 0.$$

于是，得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，由此得出线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 仅有零解. 故其系数矩阵的秩必等于未知量个数 n，从而秩$(\boldsymbol{B}) = n$.

例 19 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵，$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位阵，已知 $\boldsymbol{B} = \lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$，证明：当 $\lambda > 0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是正定矩阵.

证 因为

$$\boldsymbol{B}' = (\lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})' = (\lambda \boldsymbol{E})' + (\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})' = \lambda \boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B},$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵.

任意给定 n 维非零列向量 $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，考虑

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$n$ 个分量中至少有一个不为零. 因为 $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2>0$，所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},$$

式中 $\quad b_i=a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \quad (i=1,2,\cdots,m)$,

故 $$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}b_i^2>0.$$

于是，当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$，即当 $\lambda>0$ 时，$\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

例 20 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 均为 n 阶正定对称方阵，证明：方阵 $\boldsymbol{C}=(a_{ij}b_{ij})$ 也是 n 阶正定对称方阵.

证 $\boldsymbol{C}$ 是对称方阵是显然的. 任取 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\neq\boldsymbol{0}$，则由题设知

$$\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0,\quad \boldsymbol{x}'\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j>0.$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 正定，知存在 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{Q}=(q_{ij})$，使得 $\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$，即

$$b_{ij}=\sum_{l=1}^{n}q_{li}q_{lk}\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

所以

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}x_ix_j=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Big(\sum_{l=1}^{n}q_{li}q_{lj}\Big)x_ix_j$$
$$=\sum_{l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x_iq_{li})(x_jq_{lj}).$$

对任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'\neq\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{Q}$ 可逆，所以总存在一个 l，使得 $(x_1q_{l1},x_2q_{l2},\cdots,x_nq_{ln})'\neq\boldsymbol{0}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 正定知，对某 l 成立

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_i q_{li})(x_j q_{lj})>0,$$

从而 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_i x_j>0$，所以 $C=(a_{ij}b_{ij})$ 也是正定的.

例 21 设 $D=\begin{bmatrix} A & C \\ C' & B \end{bmatrix}$ 为正定矩阵，其中 A,B 分别为 m 阶，n 阶对称矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) 计算 $P'DP$，其中 $P=\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{bmatrix}$；

(2) 利用题(1)的结果判断矩阵 $B-C'A^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并予以证明.

解 (1) 因为 $P'=\begin{bmatrix} E_m & O \\ -C'A^{-1} & E_n \end{bmatrix}$，所以

$$\begin{aligned} P'DP &=\begin{bmatrix} E_m & O \\ -C'A^{-1} & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ C' & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} A & C \\ O & B-C'A^{-1}C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{bmatrix} \\ &=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B-C'A^{-1}C \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2) 由题(1)的结果知，矩阵 D 合同于矩阵

$$M=\begin{bmatrix} A & O \\ O & B-C'A^{-1}C \end{bmatrix}.$$

又 D 是正定矩阵，故 M 也是正定矩阵.

因 M 是对称矩阵，故 $B-C'A^{-1}C$ 为对称矩阵，对 $X=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{m})'$ 及任意的 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'\neq O$，有

$$(X',Y')\begin{bmatrix} A & O \\ O & B-C'A^{-1}C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}>0,$$

即 $Y'(B-C'A^{-1}C)Y>0$，故 $B-C'A^{-1}C$ 为正定矩阵.

第六章　线 性 空 间

线性空间是最基本的数学概念之一，通过对线性空间的讨论，将加深对于线性方程组与矩阵的理解.

第一节　集合与映射

主 要 内 容

1. **集合**是指一类研究对象的全体. 组成集合的对象个体称为集合的**元素**.

$a\in M$ 表示 a 属于集合 M，$a\notin M$ 表示 a 不是集合 M 的元素. 集合常用列举法或性质表示法表出.

2. 不含任何元素的集合称为**空集合**，记为 $\varnothing$. 若两个集合 M 与 N 含有相同的元素，称为两个集合**相等**，记为 $M=N$. 若集合 M 的元素全是集合 N 的元素，则 M 称为 N 的**子集合**，记为 $M\subseteq N$. 若集合 M 与 N 同时满足 $M\subseteq N$ 与 $N\subseteq M$，则 $M=N$.

3. 设 M 与 N 是两个集合，既属于 M 又属于 N 的全体元素的集合称为 M 与 N 的**交**，记为 $M\cap N$. 属于 M 或属于 N 的全体元素所成集合称为 M 与 N 的**并**，记为 $M\cup N$.

4. 设 M 与 M' 是两个集合，若对 M 中的每一个元素 a，按照某一法则 σ 都有 M' 中一个确定的元素 a' 与之对应，则称 σ 为集合 M 到 M' 的一个**映射**. 若映射 σ 使元素 $a\in M$ 与元素 $a'\in M'$ 对应，就记为 $\sigma(a)=a'$，a' 称为 a 在映射 σ 下的**像**，a 称为 a' 的一个**原像**.

M 到 M 自身的映射也称为 M 到自身的变换.

集合 M 到集合 M' 的两个映射 σ 及 τ，若对 M 的每个元素 a

都有$\sigma(a)=\tau(a)$，则称σ与τ相等，记为$\sigma=\tau$.

5. 设M是一个集合，若$\sigma(a)=a, a\in M$，则σ称为集合M的**恒等映射或单位映射**.

设σ,τ分别是集合M到M'，M'到M''的映射，则$(\tau\sigma)(a)=\tau(\sigma(a)), a\in M$称为**乘积**$\tau\sigma$.

映射的乘法一般不满足交换律，但满足结合律，即$(\psi\tau)\sigma=\psi(\tau\sigma)$.

6. 设σ是集合M到M'的一个映射，用$\sigma(M)$代表M在映射σ下像的全体，称为M在映射σ下像的集合，$\sigma(M)\subseteq M'$.

若$\sigma(M)=M'$，σ就映射为**映上的或满射**.

若在映射σ下，M中不同元素的像也一定不同，则映射σ称为**1-1的或单射**.

一个映射若既是单射又是满射就称为**1-1对应或双射**.

7. 设σ是集合M到M'的双射，则对$\sigma(a)=a'$定义$\sigma^{-1}(a')=a$，σ^{-1}称为σ的**逆映射**. σ^{-1}是从M'到M的双射.

疑 难 解 析

为什么要引入映射的概念？

答 在研究问题时，我们将一类研究对象的全体称为一个集合. 几类不同的研究对象的全体就是几个集合. 我们不仅要讨论一类研究对象，而且更多地要对几类不同的研究对象进行认识、分析、比较与联系，从事物的相互关系中寻找规律性，从中找出解决问题的线索与方法. 映射就是一个反映两个集合元素之间关系的数学概念，在高等代数中，映射是我们把几类不同对象联系起来进行研究的重要工具.

方法、技巧与典型例题分析

了解关于集合与映射的基本概念，能证明关于集合与映射的基本命题.

例 1 设 $M\subseteq N$，证明：$M\cap N=M, M\cup N=N$.

证 任取 $a\in M$，则由题设知 $a\in N$，从而 $a\in M\cap N\Rightarrow M\subseteq M\cap N$；又 $M\cap N\subseteq M$. 综合知 $M\cap N=M$.

任取 $a\in M\cup N$，则 $a\in M$ 或 $a\in N$，由题设知 $a\in N$，所以 $M\cup N\subseteq N$；又 $N\subseteq M\cup N$. 综合知 $M\cup N=N$.

例 2 证明：$M\cap(N\cup L)=(M\cap N)\cup(M\cap L)$，

$$M\cup(N\cap L)=(M\cup N)\cap(M\cup L).$$

证 对任取的 $a\in M\cap(N\cup L)$，有 $a\in M$ 又 $a\in(M\cup L)$. 而 $a\in(M\cup L)$，即 $a\in M$ 或 $a\in L$，所以 $a\in M\cap N$ 或 $a\in M\cap L$，从而知 $a\in(M\cap N)\cup(M\cap L)$，即

$$M\cap(N\cup L)\subseteq(M\cap N)\cup(M\cap L).$$

反之，若 $a\in(M\cap N)\cup(M\cap L)$，则 $a\in M\cap N$ 或 $a\in M\cap L$. 当 $a\in M\cap N$ 时，$a\in M$ 又 $a\in N\Rightarrow a\in N\cup L\Rightarrow a\in M\cap(N\cup L)$. 当$a\in M\cap L$ 时，$a\in M$ 又 $a\in L\Rightarrow a\in N\cup L\Rightarrow a\in M\cap(N\cup L)$.

从而 $$(M\cap N)\cup(M\cap L)\subseteq M\cap(N\cup L).$$

综合知 $$M\cap(N\cup L)=(M\cap N)\cup(M\cap L).$$

对任取的 $a\in M\cup(N\cap L)$，则 $a\in M$ 或 $a\in N\cap L$. 当 $a\in M$ 时，$a\in M\cup N$ 和 $a\in M\cup L$，因而 $a\in(M\cup N)\cap(M\cup L)$；当 $a\in N\cap L$ 时，$a\in N$ 和 $a\in L\Rightarrow a\in M\cup N$ 和 $a\in M\cup L$，即 $a\in(M\cup N)\cap(M\cup L)$. 从而

$$M\cup(N\cap L)\subseteq(M\cup N)\cap(M\cup L).$$

反之，若 $a\in(M\cup N)\cap(M\cup L)$，则 $a\in M\cup N$ 和 $a\in M\cup L$. 当 $a\notin M$ 时，必有 $a\in N$ 和 $L\Rightarrow a\in M\cup(N\cap L)$；当 $a\in M$ 时，必有 $a\in M\cup N$ 和 $a\in M\cup L\Rightarrow a\in M\cup(N\cap L)$，所以

$$(M\cup N)\cap(M\cup L)\subseteq M\cup(N\cap L).$$

综合知 $$M\cup(N\cap L)=(M\cap N)\cup(M\cap L).$$

关于集合的证明，一般有两种方法：一种方法是从等式的一端直接推导出另一端，这种证法难度太大，不易办到；另一种方法如例 1、例 2 所示，先证明等式左端的集合被等式右端的集合包含，

再证明等式右端的集合被左端的集合包含，从而等式成立．这种方法比较容易做到，所以是我们首选的．

在证明过程中，要注意符号$\in$与符号$\subseteq$之间的区别．$\in$表示元素与其集合之间的从属关系，而$\subseteq$表示两个集合之间的包容关系．元素 $a\in M$ 不能写成 $a\subseteq M$，但可以写成 $\{a\}\subseteq M$，这时 $\{a\}$ 表示只含元素 a 的单元素集．

例 3 设 r,s,t 是三个互不相同的数，且 $A=\{r,s,t\}$，$B=\{r^2,s^2,t^2\}$，$C=\{rs,st,tr\}$．若 $A=B=C$，证明：$\{r,s,t\}=\{1,w,w^2\}$，其中 $w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i})$．

证 因为 $A=B=C$，则有

$$r+s+t=r^2+s^2+t^2=rs+st+tr=k,$$

从而 $k^2=(r+s+t)^2=(r^2+s^2+t^2)+2(rs+st+tr)=3k$，

于是解得 $k=0$ 或 $k=3$．又

$$rst=r^2\cdot s^2\cdot t^2=(rst)^2,$$

故 $rst=1$．所以，当 $k=3$ 时，r,s,t 为方程 $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ 的根，解得 $r=s=t=1$，不合题意．当 $k=0$ 时，由 r,s,t 为方程 $x^3-1=0$ 的根，解得

$$x=1,\quad x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}),$$

即

$$w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}).$$

例 4 作满足下列条件的映射：

(1) 从单位圆周到[0,1]的单射；

(2) 从[0,1]到整个数轴的单射；

(3) 从正实数集合 P 到实数集合 $\mathbf{R}$ 的双射；

(4) 从 $(-1,1)$ 到 $(-\infty,+\infty)$ 的双射．

解 (1) 对任一非零复数 z，其幅角主值有 $0\leqslant\arg z\leqslant 2\pi$，则 $z\to\frac{1}{2\pi}\arg z$ 就是从单位圆周到区间[0,1]的一个单射．

(2) $x \to x$ 是从[0,1]到整个数轴的一个单射，不是满射(其中[0,1]到[0,1]，其余无对应).

(3) $x \to \ln x$ 是从 P 到 $\mathbf{R}$ 的一个双射.

(4) $x \to \tan \frac{\pi x}{2}$是从$(-1,1)$到$(-\infty,+\infty)$的一个双射.

例 5 证明下列集合对等：

$(0,1)\sim(a,a+b)$，$(0,1)\sim(0,+\infty)$，$(-1,1)\sim(-\infty,+\infty)$.

证 对于集合 A,B，如果存在从 A 到 B 上的一个 1-1 映射，则称 A 与 B 对等，记为 $A\sim B$. 因此只需找到 A,B 之间的一个双射就可以了.

$f:x\to a+bx$ 是从$(0,1)$到$(a,a+b)$的一个双射.

$f:x\to \tan\frac{\pi x}{2}$是从$(0,1)$到$(0,+\infty)$的一个双射.

$f:x\to \tan\frac{\pi x}{2}$是从$(-1,1)$到$(-\infty,+\infty)$的一个双射.

所以

$$(0,1)\sim(a,a+b),\quad (0,1)\sim(0,+\infty),$$
$$(-1,1)\sim(-\infty,+\infty).$$

第二节　线性空间定义与简单性质

主要内容

1. 定义 1 设 V 是一个非空集合，P 是一个数域，在集合 V 中的元素之间定义了**加法运算**(即对任 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有唯一的 $\boldsymbol{\gamma}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$)，在数域 P 与集合 V 中的元素之间定义了**数乘运算**(即对任一 $k\in P$ 与 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有唯一的 $\boldsymbol{\delta}\in V$，使 $\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}$). 如果加法与数乘运算满足以下规则：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$，

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$，

(3) 存在 $\mathbf{0}\in V$，使对任 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；$\mathbf{0}$ 称为 V 的零元素，

(4) 存在 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$，

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$，

(7) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$，

(8) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$，

则称 V 为**线性空间**. 线性空间的元素也称**向量**，所以线性空间也称**向量空间**.

2. 线性空间有以下简单性质：

(1) 零元素是唯一的；

(2) 负元素是唯一的；

(3) $0\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；$k\mathbf{0}=\mathbf{0}$；$(-1)\boldsymbol{\alpha}=-\boldsymbol{\alpha}$；

(4) 若 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $k=0$ 或 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

疑难解析

1. 怎样理解线性空间这一概念？

答 空间是一个数学模型. 而线性空间是对加法与数乘运算封闭、且满足 8 条运算规则的数学模型.

线性空间又称向量空间，其元素向量不是通常意义下的向量，可以是数、矩阵、多项式、函数等，因此线性空间具有一般性.

线性空间具有抽象性：其两种线性运算不一定是通常意义下的加法与数乘，但一定要满足 8 条运算规则，且在同一非空集合 V 和数域 P 上按不同规则定义这两种运算时，得到的线性空间是不同的.

当 V 不变而数域 P 不同时，线性空间的定义形式是不变的，但线性空间的某些性质可能会改变.

2. 怎样检验所给集合关于给定的运算是否构成线性空间？

答 在大多数情形下可以从定义出发来验证. 首先考虑集合

内的加法与数乘运算是否有意义(或封闭). 若它对两种线性运算封闭,则还需验证 8 条规则,如果其中某条不成立,则必须举一反例来说明. 特别要注意零向量与负向量等具体问题.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 有没有只有一个向量的线性空间? 有没有只含有限个向量的线性空间? 为什么?

解 有只含一个零向量的线性空间,不存在其它只含有限个向量的线性空间.

因为,若有非零向量 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,则对任何不同的数 $k,l\in P$,有 $k\boldsymbol{\alpha}\neq l\boldsymbol{\alpha}$,从而 V 中必有无限多个非零向量. 故不存在其它只含有限个向量的线性空间.

例 2 检验以下集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间.

(1) 次数等于 n $(n\geqslant 1)$的实系数多项式的全体,对于多项式的加法和数量乘法;

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $n\times n$ 实矩阵,$\boldsymbol{A}$ 的实系数多项式 $f(\boldsymbol{A})$的全体,对于矩阵的加法与数量乘法;

(3) 全体实对称(反对称,上三角)矩阵,对于矩阵的加法与数量乘法;

(4) 平面上不平行某一向量的全部向量所成的集合,对于向量的加法和数量乘法;

(5) 全体实数的二元数列,对于下面定义的运算:

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$

$$k(a_1,b_1)=(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2);$$

(6) 平面上全体向量,对于通常的向量加法和如下定义的数量乘法:$k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$;

(7) 集合与加法同(6),数量乘法定义为 $k\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$;

(8) 全体正实数 $\mathbf{R}^{+}$，加法与数量乘法定义为

$$a \oplus b = ab, \quad k \cdot a = a^{k}.$$

解 (1) 不是. 因为两个多项式相加可能不是多项式.

(2) 是. 由矩阵加法知 $f(\mathbf{A})+g(\mathbf{A})=h(\mathbf{A})$，由矩阵数乘知 $kf(\mathbf{A})=d(\mathbf{A})$，所以对加法与数乘封闭. 又 V 中含有 $\mathbf{A}$ 的零次多项式作为零元，以 $f(x)$ 的各项系数的相反数为系数的多项式 $-f(x)$，$f(\mathbf{A})$ 的负元为 $-f(\mathbf{A})$. 同时矩阵加法与数乘运算满足其它各条规则.

(3) 是. 如对于上三角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $k\boldsymbol{A}$ $(k\in P)$ 仍为上三角矩阵，所以对加法与数乘封闭. 零矩阵是零元，$-\boldsymbol{A}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的负元. 矩阵的加法与数乘运算满足其它各条规则. 当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为实对称矩阵时类似可证.

(4) 不是. 因为两个不平行于某向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量之和可能平行向量 $\boldsymbol{\alpha}$（如以 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三角形一边，而另两边为两个不平行 $\boldsymbol{\alpha}$ 的向量）.

(5) 是. 对于加法运算与数乘运算封闭是显然的. 存在零元 $(0,0)$；元素 (a,b) 存在负元 $(-a,a^2-b)$. 可以验证满足其它运算规则.

(6) 不是. 因为 $1\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\alpha}$.

(7) 不是. 因为对任何 $k,l\in P$，$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}\neq k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}=2\boldsymbol{\alpha}$.

(8) 是. 对于加法运算与数乘运算封闭是显然的. 存在零元 1；元素 a 存在负元 $\frac{1}{a}$. 可以验证满足其它运算规则.

例 3 在线性空间中，证明：

(1) $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$； (2) $k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}$.

证 (1) 因为 $k(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0})=k\boldsymbol{\alpha}$，即 $k\boldsymbol{\alpha}+k\mathbf{0}=k\boldsymbol{\alpha}$，所以 $k\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

(2) 因为 $k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+k\boldsymbol{\beta}=k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}$，所以 $k(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}-k\boldsymbol{\beta}$.

例 4 证明：在线性空间定义中，"加法满足交换律（$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$）"不是独立的（即可从其它 7 条规则推出）.

证 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 V 中任意两个向量，则

$$\begin{aligned}2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=2\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}=(1+1)\boldsymbol{\alpha}+(1+1)\boldsymbol{\beta}\\&=(1\boldsymbol{\alpha}+1\boldsymbol{\alpha})+(1\boldsymbol{\beta}+1\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=(1+1)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+1(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

比较两式，得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$. 即加法交换律不独立.

例 5 按通常数域上的加法与数乘运算，下列 n 维向量集合是否是该数域上线性空间？

(1) $V=\{(a,b,a,b,\cdots,a,b)\mid a,b\in P\}$；

(2) $V=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_n\;\middle|\;\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=1\right\}$.

解 (1) 是. 对加法运算与数乘运算封闭. 存在零元 $(0,0,0,0,\cdots,0,0)$，对 $(a,b,a,b,\cdots,a,b)$ 存在负元 $(-a,-b,-a,-b,\cdots,-a,-b)$. 可以验证，满足其它运算规则.

(2) 不是. 不存在零向量，即 $(0,0,\cdots,0)\notin V$.

第三节 维数、基与坐标 基变换与坐标变换

主要内容

1. 定义 1 设 V 是数域 P 上的一个线性空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ $(r\geqslant1)$ 是 V 中一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是数域 P 中的数，则 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的一个**线性组合**，也称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ **线性表出**.

定义 2 若

(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$

是 V 中的两个向量组，如果（Ⅰ）中每个向量可以由（Ⅱ）线性表出，则称（Ⅰ）可以由（Ⅱ）线性表出．若（Ⅰ）与（Ⅱ）可以相互线性表出，则称（Ⅰ）与（Ⅱ）是**等价**的．

定义 3 线性空间 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ $(r\geqslant 1)$ 称为**线性相关**，如果在数域 P 中有 r 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

如果向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 不线性相关，就称为**线性无关**．

2. 几个常用结论：

(1) 单个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$；两个以上向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充要条件是其中有一个向量是其余向量的线性组合．

(2) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，且可被 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 线性表出，则 $r\leqslant s$．

(3) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，但向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出，而且表示法唯一．

3. 定义 4 若在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量，但 V 中没有更多数目的线性无关的向量，则称 V 为 n **维的**．若在 V 中可以找到任意多个线性无关的向量，则称 V 为**无限维的**．

定义 5 在 n 维线性空间 V 中，n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 称为 V 的一组**基**．设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 V 中的一个向量，则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关，且 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以被基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 线性表出，即

$$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

其中系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是被向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 唯一确定的，这组数称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的**坐标**，记为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$．

定理 1 若在线性空间 V 中有 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，且 V 中任一向量都可以由它们线性表出，则 V 是 n 维的，而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基．

4. 设V是数域P上的n维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$与$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$是$V$的两组基. 关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1'=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2'=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{\varepsilon}_n'=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n\end{cases}$$

称为**基变换公式**，可以形式地写为

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}.$$

其中
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

称为由基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$到$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$的**过渡矩阵**.

V中元素$\boldsymbol{\alpha}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$下的坐标$(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$与在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$下的坐标$(x_1',x_2',\cdots,x_n')'$满足关系式

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\mathbf{A}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\text{或者}\begin{bmatrix}x_1'\\x_2'\\\vdots\\x_n'\end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

5. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$和$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$是$V$中的两个向量组，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是两个$n\times n$矩阵，则有以下运算规则：

$$((\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A})\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\mathbf{A}\boldsymbol{B});$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A}+(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)(\mathbf{A}+\boldsymbol{B});$$
$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\mathbf{A}+(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n+\boldsymbol{\beta}_n)\mathbf{A}.$$

疑 难 解 析

1. 怎样求过渡矩阵?

答 求过渡矩阵的常用方法有：

(1) 用定义求. 直接计算$\boldsymbol{\varepsilon}_i'$ $(i=1,2,\cdots,n)$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$

下的坐标列$(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$作为$\boldsymbol{A}$的第$i$列，其形式为

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}.$$

(2) 用公式$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$求. 当$V$是$n$维空间时，$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$与$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')$都可看作方阵，从而

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n').$$

(3) 用坐标变换公式$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$求，式中$\boldsymbol{Y}$与$\boldsymbol{X}$分别为基$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n')$与$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$下的坐标列，从而

$$\boldsymbol{A}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{-1}(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

2. 同一向量在不同基上的坐标是否一定不同？不同向量在同一基上的坐标是否可以相同？

答 同一向量在不同基下的坐标有时可以相同. 如零向量$\mathbf{0}$在任何基下的坐标都相同；又如向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$是三维向量空间的一个基，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,2\boldsymbol{\varepsilon}_2,3\boldsymbol{\varepsilon}_3$也是三维向量空间的一个基，向量$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)=\boldsymbol{\varepsilon}_1$在这两个基上的坐标相同，都是$(1,0,0)$.

当线性空间的基确定后，每个向量的坐标是唯一确定的，所以不同向量在同一基下的坐标一定不相同.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 证明：在实函数空间中，$1,\cos^2t,\cos2t$是线性相关的.

证 当$1,\cos^2t,\cos2t$作为向量时，因为有关系式$\cos2t=2\cos^2t-1$，所以$1,\cos^2t,\cos2t$是线性相关的.

例 2 若$f_1(x),f_2(x),f_3(x)$是线性空间$P[x]$中三个互素的多项式，但其中任意两个都不互素，证明它们线性无关.

证 用反证法. 设它们线性相关，则存在不全为零的k_1,k_2,k_3，使得

$$k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+k_3f_3(x)=0.$$

不妨设$k_1\neq0$，则

$$f_1(x)=-\frac{k_2}{k_1}f_2(x)-\frac{k_3}{k_1}f_3(x),$$

知 $f_2(x)$，$f_3(x)$的公因式是 $f_1(x)$的因式，从而知 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$线性无关.

例 3 在 P^4 中，求向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标. 设：

(1) $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,-1,-1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,-1,1,-1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(1,-1,-1,1)$，$\boldsymbol{\xi}=(1,2,1,1)$；

(2) $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,0,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,3,1)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,1,-1,-1)$，$\boldsymbol{\xi}=(0,0,0,1)$.

解 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 线性无关，故可以用克拉默法则解方程求出解.

也可以对矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\boldsymbol{\varepsilon}_4',\boldsymbol{\xi}')$施行初等行变换求出解.

(1) 解方程 $\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3+x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4$，因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 线性无关，所以线性方程

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\x_1+x_2-x_3-x_4=2,\\x_1-x_2+x_3-x_4=1,\\x_1-x_2-x_3+x_4=1\end{cases}$$

有唯一解，依克拉默法则求得

$$x_1=\frac{5}{4},\ x_2=\frac{1}{4},\ x_3=-\frac{1}{4},\ x_4=-\frac{1}{4}.$$

或写出矩阵$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\boldsymbol{\varepsilon}_4',\boldsymbol{\xi}')$，作初等行变换

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\1&1&-1&-1&\vdots&2\\1&-1&1&-1&\vdots&1\\1&-1&-1&1&\vdots&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&0&-2&-2&\vdots&1\\0&-2&0&-2&\vdots&0\\0&-2&-2&0&\vdots&0\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&0&1&\vdots&0\\0&0&1&1&\vdots&-1/2\\0&0&1&-1&\vdots&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&0&1&\vdots&0\\0&0&1&1&\vdots&-1/2\\0&0&0&-2&\vdots&1/2\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&1\\0&1&0&1&0\\0&0&1&1&-1/2\\0&0&0&1&-1/4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&5/4\\0&1&0&0&1/4\\0&0&1&0&-1/4\\0&0&0&1&-1/4\end{array}\right],$$

所以
$$\xi=\frac{5}{4}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{1}{4}\boldsymbol{\varepsilon}_2-\frac{1}{4}\boldsymbol{\varepsilon}_3-\frac{1}{4}\boldsymbol{\varepsilon}_4.$$

(2) 写出矩阵$(\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\boldsymbol{\varepsilon}_3',\boldsymbol{\varepsilon}_4',\xi)$,作初等行变换

$$\left[\begin{array}{cccc:c}1&2&1&0&0\\1&1&1&1&0\\0&3&0&-1&0\\1&1&0&1&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}0&1&0&-1&0\\1&1&1&1&0\\0&3&0&-1&0\\0&0&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&1&1&1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&2&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cccc:c}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&-1\\0&0&0&1&0\end{array}\right],$$

所以
$$\xi=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

例 4 求下列线性空间的维数与一组基:

(1) 数域 P 上的空间 $P^{n\times n}$;

(2) $P^{n\times n}$上全体对称(反对称,上三角)矩阵作成的数域 P 上的空间;

(3) 第二节例 2(8)中的空间;

(4) 实数域上矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全体实系数多项式组成的空间,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{bmatrix},\quad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

解 (1) $\boldsymbol{E}_{ij}$是 i 行 j 列元素为 1 而其余元素全为零的 n 阶方阵,显然 $\boldsymbol{E}_{ij}$,$(i,j=1,2,\cdots,n)$线性无关,且对任意 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}\in P^{n\times n}$,有 $\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$,故 $\boldsymbol{E}_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$是线性空间

的一组基，且可知 $P^{n\times n}$ 是 n^2 维的.

(2) 分三种情形讨论：

① 作 $\boldsymbol{F}_{ij}=\begin{cases}\boldsymbol{E}_{ij}, i=j,\\ \boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}, i\neq j,\end{cases}$ 可知 $\boldsymbol{F}_{ij}$ 是对称矩阵. 显然 $\boldsymbol{F}_{11},\cdots,\boldsymbol{F}_{1n},\boldsymbol{F}_{21},\cdots,\boldsymbol{F}_{2n},\cdots,\boldsymbol{F}_{nn}$ 线性无关，且对任意 n 阶对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，有 $\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{F}_{ij}$，故 $\boldsymbol{F}_{11},\cdots,\boldsymbol{F}_{1n},\boldsymbol{F}_{21},\cdots,\boldsymbol{F}_{2n},\cdots,\boldsymbol{F}_{nn}$ 是 $P^{n\times n}$ 中全体对称矩阵所成空间的一组基，且可知是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维的.

② 作 $\boldsymbol{G}_{ij}=\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}\ (i<j)$，可知 $\boldsymbol{G}_{ij}$ 是反对称矩阵. 显然 $\boldsymbol{G}_{12},\cdots,\boldsymbol{G}_{1n},\boldsymbol{G}_{23},\cdots,\boldsymbol{G}_{2n},\cdots,\boldsymbol{G}_{n-1\,n}$ 线性无关，且对任意 n 阶反对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，有 $\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{G}_{ij}$，故 $\boldsymbol{G}_{12},\cdots,\boldsymbol{G}_{1n},\boldsymbol{G}_{23},\cdots,\boldsymbol{G}_{2n},\cdots,\boldsymbol{G}_{n-1\,n}$ 是 $P^{n\times n}$ 中全体反对称矩阵所组成空间的一组基，且可知是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 维的.

③对任意上三角矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，其中 $a_{ij}=0\ (i>j)$，有 $\boldsymbol{A}=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$；又 $\boldsymbol{E}_{11},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{22},\cdots,\boldsymbol{E}_{2n},\cdots,\boldsymbol{E}_{nn}$ 均为上三角矩阵，且线性无关，故它们是 $P^{n\times n}$ 中全体上三角矩阵所组成空间的一组基，且可知是 $\frac{n(n+1)}{2}$ 维的.

(3) 该空间中数 1 是零元，数 2 是非零元，是线性无关的. 对于任一正实数 a，由 $a=k\cdot 2=2^k\Longrightarrow k=\log_2 a\Longrightarrow a=(\log_2 a)\cdot 2$ 知 a 可由 2 线性表出，从而由 a 的任意性知，空间是一维的，2 是其一组基(任意不等于 1 的正数都可以作为一组基).

(4) 因为 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$，$\omega^3=1$，所以

$$\omega^n=\begin{cases}1, & n=3m,\\ \omega, & n=3m+1,\\ \omega^2, & n=3m+2,\end{cases}$$

从而 $A^2=\begin{bmatrix}1&&\\&\omega^2&\\&&\omega\end{bmatrix}$, $A^3=E$, $A^n=\begin{cases}E, & n=3m,\\ A, & n=3m+1,\\ A^2, & n=3m+2.\end{cases}$

即知 $f(\boldsymbol{A})$ 可以表成 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2$ 的线性组合.

又设 $k_1\boldsymbol{E}+k_2\boldsymbol{A}+k_3\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{0}$,则由

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0,\\ k_1+k_2\omega+k_3\omega^2=0,\\ k_1+k_2\omega^2+k_3\omega=0,\end{cases}\Rightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=3\omega(\omega-1)\neq 0$$

知该齐次线性方程组只有零解,即 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2$ 线性无关,从而知 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2$ 是一组基,空间是三维的.

例 5 在 P^4 中求由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵,并求向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在所指基下的坐标. 设

(1) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,-1,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,3,1,0),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(5,3,2,1),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(6,6,1,3),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标;

(2) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,2,-1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,-1,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,2,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(-1,-1,0,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(2,1,0,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,2,2),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(-2,1,1,2),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(1,3,1,2),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标;

(3) $\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,1,1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,-1,-1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,-1,1,-1),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_4=(1,-1,-1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0,1),\\ \boldsymbol{\eta}_2=(2,1,3,1),\\ \boldsymbol{\eta}_3=(1,1,0,0),\\ \boldsymbol{\eta}_4=(0,1,-1,-1),\end{cases}$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,1,-1)$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标.

解 利用疑难解析 1 中方法可求过渡矩阵.

(1) 因为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\eta}_1=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\\ \boldsymbol{\eta}_2=3\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \boldsymbol{\eta}_3=5\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\\ \boldsymbol{\eta}_4=6\boldsymbol{\varepsilon}_1+6\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+3\boldsymbol{\varepsilon}_4,\end{cases}$$

得 $$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix},$$

故过渡矩阵 $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{bmatrix}.$$

由 $$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix},$$

其中 $$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{27}\begin{bmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{bmatrix},$$

知 $\boldsymbol{\xi}$ 在$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)$下的坐标为

$$\begin{cases}x_1'=\frac{4}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3-\frac{11}{9}x_4,\\ x_2'=\frac{1}{27}x_1+\frac{4}{9}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4,\\ x_3'=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_4,\\ x'_4=-\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{26}{27}x_4.\end{cases}$$

(2) 利用矩阵乘法. 取 $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(0,1,0,0)$, $e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=(0,0,0,1)$. 由

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{A},$$

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{B},$$

式中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{bmatrix}$,

得 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\frac{1}{13}\begin{bmatrix}3&2&-6&5\\5&-1&3&4\\-2&3&4&1\\-3&-2&-7&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&-2&1\\1&1&1&3\\0&2&1&1\\1&2&2&2\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{P}.$$

$\boldsymbol{P}$ 即为所求过渡矩阵.

由于$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4)\boldsymbol{A}$,所以 $\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,0)$在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的坐标为

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\xi}'=\frac{1}{13}(3,5,-2,-3),$$

即
$$\boldsymbol{\xi}=\frac{3}{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{5}{13}\boldsymbol{\varepsilon}_2-\frac{2}{13}\boldsymbol{\varepsilon}_3-\frac{3}{13}\boldsymbol{\varepsilon}_4.$$

(3) 同题(2)可得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\1&1&1&1\\0&3&0&-1\\1&1&0&-1\end{bmatrix},$$

故过渡矩阵 $$P=A^{-1}B=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{bmatrix},$$

$\boldsymbol{\xi}=(1,0,0,-1)$在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的坐标为

$$B^{-1}\boldsymbol{\xi}'=\frac{1}{2}(-4,-1,8,-3),$$

即 $$\boldsymbol{\xi}=-2\boldsymbol{\eta}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_2+4\boldsymbol{\eta}_3-\frac{3}{2}\boldsymbol{\eta}_4.$$

例 6 由例 5(1),求一非零向量 $\boldsymbol{\xi}$,它在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下有相同的坐标.

解 设向量 $\boldsymbol{\xi}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_4=(0,0,0,1)$下有

$$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3+x_4\boldsymbol{\varepsilon}_4.$$

又由 $$\boldsymbol{\xi}=x_1\boldsymbol{\eta}_1+x_2\boldsymbol{\eta}_2+x_3\boldsymbol{\eta}_3+x_4\boldsymbol{\eta}_4,$$

得方程组 $$\begin{cases}x_1\qquad\ +5x_3+6x_4=0,\\x_1+2x_2+3x_3+6x_4=0,\\-x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_1\qquad\ +x_3+2x_4=0,\end{cases}$$ 即 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

因为,由 $\boldsymbol{x}=A\boldsymbol{x}\Rightarrow(A-E)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,即得方程组

$$\begin{bmatrix}1&0&5&6\\1&2&3&6\\-1&1&1&1\\1&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

解此齐次线性方程组,得通解 $x_1=x_2=x_3=c,x_4=-c$. 故

$$\boldsymbol{\xi}=(c,c,c,-c).$$

例 7 (1) 证明:在 $P[x]_n$ 中,多项式

$f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)\ (i=1,2,\cdots,n)$

是一组基,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是一组互不相同的数;

(2)若取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单根,求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

证 (1) 由于 $P[x]_n$ 是 n 维空间,所以只需证明 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关.

设有一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使得

$$k_1f_1+k_2f_2+\cdots+k_nf_n=0.$$

将 $x=a_1$ 代入,则因为 $f_1(a_1)\neq 0$,而 $f_i(a_1)=0\ (i=2,3,\cdots,n)$,就得出 $k_1f_1(a_1)=0\Longrightarrow k_1=0$. 同理,可求得 $k_2=\cdots=k_n=0$. 从而,知 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 线性无关,是一组基.

(2)可取 $a_1=\varepsilon_1,a_2=\varepsilon_2,\cdots,a_n=\varepsilon_n$,即 n 次单根,则有

$x^n-1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_n)=(x-\varepsilon_i)f_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$.

由 $\varepsilon_i^n=1$,得

$$f_i=\frac{x^n-1}{x-\varepsilon_i}=\varepsilon_i^{n-1}+\varepsilon_i^{n-2}x+\cdots+\varepsilon_ix^{n-2}+x^{n-1},$$

得出由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1^{n-1} & \varepsilon_2^{n-1} & \cdots & \varepsilon_n^{n-1}\\ \varepsilon_1^{n-2} & \varepsilon_2^{n-2} & \cdots & \varepsilon_n^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

例 8 设 P_n 是 P 上次数不超过 n 的多项式全体,求由基 $\boldsymbol{\alpha}_1=1,\boldsymbol{\alpha}_2=x,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n+1}=x^n$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1=1,\boldsymbol{\beta}_2=(x-a),\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n+1}=(x-a)^n$ 的过渡矩阵,并求多项式 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在这两组基下的坐标.

解 设所求过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列是 $\boldsymbol{\beta}_j=(x-a)^{j-1}$ 在基 $1,x,\cdots,x^n$ 下的坐标,故有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -a & a^2 & \cdots & (-1)^na^n\\ 0 & 1 & -2a & \cdots & (-1)^{n-1}na^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

又 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 在基 $1,x,\cdots,x^n$ 下的坐标列为其系数排成的列向量 $(a_0,a_1,\cdots,a_n)'$；在基 $1,(x-a),(x-a)^2,\cdots,(x-a)^n$ 下的坐标列为其泰勒(Taylor)展开式系数排成的列向量，即

$$\left(f(a),f'(a),\frac{f''(a)}{2!},\cdots,\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\right)'.$$

例 9 设 V 为由零及次数为 n 的 m 个未知量的齐次多项式作成的线性空间，求 V 的维数.

解 设 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为 m 个未知量，因为任意一个次数为 n 的 m 个未知量的齐次多项式 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 均可唯一地表为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} a_{k_1k_2\cdots k_m}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{k_m},$$

所以 $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_m^{km}$ $(0\leqslant k_i\leqslant n,k_1+k_2+\cdots+k_m=n)$ 是线性空间 V 的一组基，这也就是 $(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开后非同类项的项数，等于从 m 个元素 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 中每次取 n 个元素的重复组合数. 故维数

$$C_{n+m-1}^{n}=C_{n+m-1}^{m-1}=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)}{(m-1)!}.$$

例 10 证明：向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,\cdots,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\cdots,1,0)$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n=(1,0,\cdots,0)$ 是空间 P^n 的一组基. 并求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在此基下的坐标.

证 因为以 $\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n'$ 为列向量的矩阵

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1&1&\cdots&1&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&\cdots&0&0\end{bmatrix}$$

是满秩的，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，是 P^n 的一组基.

解方程组 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\alpha}$，求出解

$$x_1=a_n,x_2=a_{n-1}-a_n,\cdots,x_n=a_1-a_2,$$

这就是向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的坐标.

例 11 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是 n 维空间 V 中一组线性无关的向量,证明:总可以添加 $n-r$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 作成 V 的一组基.特别地,n 维线性空间中任意 n 个线性无关的向量都可以取作基.

证 设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 V 的一组基,则每一 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出.适当改变 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的编号,可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 替换前 r 个基向量 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$,得到一个与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 等价的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,是它本身的一个极大无关组,因而是 V 的一个基,取 $\boldsymbol{\alpha}_j=\boldsymbol{\beta}_j$ $(j=r+1,\cdots,n)$,则命题得证.

第四节 线性子空间 子空间的交、和与直和

主要内容

1. 定义 1 数域 P 上线性空间 V 的一个非空子集合 W 称为 V 的一个**线性子空间**(简称子空间),如果 W 对于 V 的两种运算也构成数域 P 上的线性空间.

定理 1 若线性空间 V 的非空子集合 W 对于 V 的两种运算是封闭的,即满足条件:

(1) 若 W 中包含向量 $\boldsymbol{\alpha}$,则 W 一定同时包含域 P 中的数 k 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的数量乘积 $k\boldsymbol{\alpha}$.

(2) 若 W 中包含向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$,则 W 同时包含 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$.

则 W 是一个子空间.

2. 由单个零向量所组成的子空间称为**零子空间**.零子空间与线性空间本身这两个子空间又称为**平凡子空间**,其余线性子空间称为**非平凡子空间**.

齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的全部解向量组成的子空间称为齐次线性方程组的**解空间**,维数等于 $n-r$ ($r=$秩$(\boldsymbol{A})$).

由线性空间 V 中一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的所有线性组合 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 构成的 V 的一个子空间，称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 生成的子空间，记为 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$.

3. **定理 2** (1)两个向量组生成相同子空间的充分必要条件是这两个向量组等价；(2) $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$的维数等于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的秩.

定理 3 设 W 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个 m 维子空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 W 的一组基，则这组向量必定可以扩充为线性空间 V 的基. 即在 V 中必可找到 $n-m$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\boldsymbol{\alpha}_{m+2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基.

4. **定理 4** 若 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间，则它们的交 $V_1\cap V_2$ 也是 V 的子空间.

子空间的交有以下运算规律：

$V_1\cap V_2=V_2\cap V_1,(V_1\cap V_2)\cap V_3=V_1\cap(V_2\cap V_3)$.

$V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_s=\bigcap\limits_{i=1}^{s}V_i$ 也是子空间.

定义 2 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间，V_1 与 V_2 的和是指所有能表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，而 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$ 的向量组成的子集合，记为 V_1+V_2.

定理 5 若 V_1,V_2 是 V 的子空间，则它们的和 V_1+V_2 也是 V 的子空间.

子空间的和有以下运算规律：

$V_1+V_2=V_2+V_1,(V_1+V_2)+V_3=V_1+(V_2+V_3)$.

$V_1+V_2+\cdots+V_s=\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$ 也是子空间.

关于子空间的交与和有以下结论.

(1) 设 V_1,V_2,W 都是子空间，则由 $W\subseteq V_1$ 与 $W\subseteq V_2$ 可以推出 $W\subseteq V_1\cap V_2$；而由 $W\supseteq V_1$ 与 $W\supseteq V_2$ 可以推出 $W\supseteq V_1+V_2$.

(2) 三个论断：$V_1\subseteq V_2,V_1\cap V_2=V_1,V_1+V_2=V_2$ 是等价的.

5. 定理(维数公式)　若 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个子空间,则

$$\text{维}(V_1)+\text{维}(V_2)=\text{维}(V_1+V_2)+\text{维}(V_1\cap V_2).$$

推论　若 n 维线性空间 V 中两个子空间 V_1,V_2 的维数之和大于 n,则 V_1,V_2 必含有非零的公共向量.

6. 定义 3　设 V_1,V_2 是线性空间 V 的子空间,若和 V_1+V_2 中每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\quad \boldsymbol{\alpha}_1\in V_1,\quad \boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$$

是唯一的,这个和称为**直和**,记为 $V_1\oplus V_2$.

定理 6　和 V_1+V_2 是直和的充分必要条件是等式 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}_i\in V_i\ (i=1,2)$仅在 $\boldsymbol{\alpha}$ 全为零向量时才成立.

推论　和 V_1+V_2 为直和的充分必要条件是 $V_1\cap V_2=\{\mathbf{0}\}$.

定理 7　设 V_1,V_2 是 V 的子空间,令 $W=V_1+V_2$,则 $W=V_1\oplus V_2$ 的充分必要条件为维$(W)=$维$(V_1)+$维(V_2).

定理 8　设 U 是线性空间 V 的一个子空间,则必存在一个子空间 W,使 $V=U\oplus W$.

7. 定义 4　设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是线性空间 V 的子空间,若和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的分解式 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_i\in V_i\ (i=1,2,\cdots,s)$是唯一的,这个和称为**直和**,记为 $V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$.

定理 9　设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是线性空间 V 的子空间,下面这些条件是等价的:

(1) $W=\sum\limits_i V_i$ 是直和;

(2) 零向量的表示法唯一;

(3) $V_i\cap\sum\limits_{i\neq j}V_j=\{\mathbf{0}\}\ (i=1,2,\cdots,s)$;

(4) 维$(W)=\sum\limits_i$维(V_i).

疑难解析

1. 怎样求两个子空间 V_1 与 V_2 的和与交的维数与基?

答 设 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$, $V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 则 $V_1+V_2=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$. 要求 V_1+V_2 的基,就应求 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t$ 的极大无关组. 将这 $s+t$ 个向量的坐标列排成 $n\times(s+t)$ 矩阵,对 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)$ 作初等行变换,化为阶梯形 $(\boldsymbol{\alpha}_1',\boldsymbol{\alpha}_2',\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s',\boldsymbol{\beta}_1',\boldsymbol{\beta}_2',\cdots,\boldsymbol{\beta}_t')$,设其秩为 r,则 V_1+V_2 为 r 维. 可知 r 阶不为零子式所在列向量即为 V_1+V_2 的一组基.

若 V_1 为 s_1 维, V_2 为 t_1 维, V_1 的基为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s_1}$, V_2 的基为 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{t_1}$,则对于任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$,有 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1$, $\boldsymbol{\alpha}\in V_2$. 于是

$$\boldsymbol{\alpha}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{s_1}\boldsymbol{\alpha}_{s_1}=\mu_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+\mu_{t_1}\boldsymbol{\beta}_{t_1}.$$

对以 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{s_1},-\mu_1,\cdots,-\mu_{t_1}$ 为未知元的线性方程求解(仍可利用上面的阶梯型,只需划去 $(s-s_1)+(t-t_1)$ 列),则此齐次线性方程组

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\lambda_{s_1}\boldsymbol{\alpha}_{s_1}-\mu_1\boldsymbol{\beta}_1-\cdots-\mu_{t_1}\boldsymbol{\beta}_{t_1}=\mathbf{0}$$

的解空间的维数即是 $V_1\cap V_2$ 的维数,以其基础解系 $\{\boldsymbol{\eta}_i\}$ 为组合系数得到的 $\{\boldsymbol{r}_i\}$ 就是 $V_1\cap V_2$ 的基.

2. 怎样构造子空间?

答 构造子空间的一般方法是:

设 V 是一个线性空间, S 为 V 的一个非空子集. 令

$$L(S)=\{k_1\boldsymbol{\xi}+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\xi}_r\mid\boldsymbol{\xi}_i\in S,k_i\in P,t\in\mathbf{N}\},$$

则 $L(S)$ 是 V 的一个子空间.

因为,任取 $\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{\alpha}_r$, $\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\beta}_1+b_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+b_s\boldsymbol{\beta}_s$,式中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\in S$, $a_1,\cdots,a_r,b_1,\cdots,b_s\in P$,则

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+a_r\boldsymbol{\alpha}_r+b_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+b_s\boldsymbol{\beta}_s\in L(S),$$

$$k\boldsymbol{\alpha}=ka_1\boldsymbol{\alpha}_1+ka_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+ka_r\boldsymbol{\alpha}_r\in L(S).$$

从而知 $L(S)$ 是一个子空间.

3. 是不是任何线性空间都是有限元生成的?

答 不是. 可以用反证法说明. 设 $P[x]$ 是有限元生成的,则

有有限个非零向量 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_t(x)$ 是 $P[x]$ 的一组生成元，这时对线性空间 $P[x]$ 中的任一向量 $g(x)$，必有

$$g(x)=k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+\cdots+k_tf_t(x), k_i\in P.$$

因为生成元是多项式，都有一个确定的次数，设其最高次数为 m，所以当 $g(x)=x^{m+1}$ 时，上式就不可能成立，从而知 $P[x]$ 这个线性空间不是有限元生成的.

对于有限元生成的线性空间，其生成元一般也不只一组，如 $P^{(n)}=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=L(2\boldsymbol{\varepsilon}_1,2\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,2\boldsymbol{\varepsilon}_n)=L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,2\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,n\boldsymbol{\varepsilon}_n)$.

4. 两个子空间的并集能否作成子空间?

答 一般作不成子空间. 如 $V_1=\{(x,y,0)\mid x,y\in P\}$，$V_2=\{(0,y,z)\mid y,z\in P\}$ 的并集 $V_1\cup V_2$ 就不是子空间. 因为，取 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\beta}=(0,1,1)$，显然 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_1\cup V_2$，但是 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_1+V_2$. 所以 $V_1\cup V_2$ 不是一个子空间.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，$\boldsymbol{A}$ 是一 $n\times s$ 矩阵，

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

证明：$L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)$ 的维数等于 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

证 设秩$(\boldsymbol{A})=r$，不妨设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列线性无关，并将 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 列分块为 $\boldsymbol{A}_1$，后 $s-r$ 列分块为 $\boldsymbol{A}_2$，则 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2)$，秩$(\boldsymbol{A}_1)=$秩$(\boldsymbol{A})=r$. 因为

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A},$$

所以

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_1.$$

设有 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\beta}_r=\boldsymbol{0}$，则有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{A}_1\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow\boldsymbol{A}_1\begin{bmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_r\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}.$$

由秩$(\boldsymbol{A}_1)=r$知，关于$k_1,k_2,\cdots,k_r$的方程组只有零解，故$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性无关.

任取$\boldsymbol{\beta}_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$，再将$\boldsymbol{A}$的第j列添在$\boldsymbol{A}_1$右边，构成矩阵$\boldsymbol{B}_j$，则有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\beta}_j)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}_j.$$

设有$l_1\boldsymbol{\beta}_1+\cdots+l_r\boldsymbol{\beta}_r+l_{r+1}\boldsymbol{\beta}_j=\boldsymbol{0}$，则有

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{B}_j\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_{r+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}\Longrightarrow\boldsymbol{B}_j\begin{bmatrix}l_1\\l_2\\\vdots\\l_{r+1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0},$$

由秩$(\boldsymbol{B}_j)=r$知，关于$l_1,\cdots,l_r,l_{r+1}$的方程组有非零解. 从而知$\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\beta}_j$线性相关，即$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$的一个极大无关组. 因而

$$\dim L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s)=r.$$

例 2 设V_1,V_2都是线性空间V的子空间，且$V_1\subseteq V_2$，证明：若V_1与V_2的维数相等，则$V_1=V_2$.

证 设V_1的维数为r，若$r=0$，则V_1与V_2都是零空间，显然相等. 当$r\neq 0$时，任取V_1的一组基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$，由于$V_1$与$V_2$维数相等，故$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$也是$V_2$的一组基，所以$V_2$中任一向量均可由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$线性表出，而$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$的任一线性组合也是$V_1$中的向量，于是$V_1=V_2$.

例 3 设$\boldsymbol{A}\in P^{n\times n}$

(1) 证明：全体与$\boldsymbol{A}$可交换的矩阵组成$P^{n\times n}$的一个子空间$C(\boldsymbol{A})$；

(2) 当$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$时，求出$C(\boldsymbol{A})$；

(3) 当$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&2&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&n\end{bmatrix}$时，求$C(\boldsymbol{A})$的维数和一组

基.

证 (1)因为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}$ 都可与 $\boldsymbol{A}$ 交换,所以 $C(\boldsymbol{A})$非空. 取 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2\in C(\boldsymbol{A})$和 $k\in P$,则

$$(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}\xlongequal{\text{可交换}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2),$$
$$(k\boldsymbol{A}_1)\boldsymbol{A}=k(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A})=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1)=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{A}_1),$$

即 $\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2$ 与 $k\boldsymbol{A}\in C(\boldsymbol{A})$,故 $C(\boldsymbol{A})$为子空间.

(2) 当 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 时,因为任何方阵都可与单位阵交换,故 $C(\boldsymbol{A})=P^{n\times n}$.

(3) 能与所给矩阵 $\boldsymbol{A}$ 交换的矩阵只能是对角阵(见第四章第一节例 5),同时所有对角阵都可与 $\boldsymbol{A}$ 交换,故 $C(\boldsymbol{A})$是 n 维的,$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{22},\cdots,\boldsymbol{E}_{nn}$ 是其一组基.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{bmatrix}$,求 $P^{3\times3}$ 中全体与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵所生成子空间的维数和一组基.

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\3&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3&1&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}_1,$$

所以,与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的全体矩阵就是与 $\boldsymbol{A}_1$ 可交换的全体矩阵,即 $C(\boldsymbol{A})=C(\boldsymbol{A}_1)$.

设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a&b&c\\a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\end{bmatrix}$为一可与 $\boldsymbol{A}$ 交换矩阵. 因为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\3a+a_1+a_2&3b+b_1+b_2&3c+c_1+c_2\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}3c & c & c\\ 3c_1 & c_1 & c_1\\ 3c_2 & c_2 & c_2\end{bmatrix},$$

$$AB=BA.$$

比较两端矩阵各元素可得

$$a=-\frac{1}{3}t_1-\frac{1}{3}t_3+t_5,\quad b=-\frac{1}{3}t_2-\frac{1}{3}t_4+\frac{1}{3}t_5.$$

$$a_1=t_1,\quad b_1=t_2,\quad a_2=t_3,\quad b_2=t_4,\quad c_2=t_5.$$

于是 $$B=t_1B_1+t_2B_2+t_3B_3+t_4B_4+t_5B_5.$$

故 $C(A)$的维数为 5，B_1,B_2,B_3,B_4,B_5 是一组基：

$$B_1=\begin{bmatrix}-1/3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0 & -1/3 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\ B_3=\begin{bmatrix}-1/3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_4=\begin{bmatrix}0 & -1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B_5=\begin{bmatrix}1 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

例 5 若 $c_1\boldsymbol{\alpha}+c_2\boldsymbol{\beta}+c_3\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，且 $c_1c_3\neq 0$，证明：$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$.

证 由 $c_1c_3\neq 0$ 知，$c_1\neq 0$，$c_3\neq 0$，故由题设可得 $\boldsymbol{\alpha}=-\frac{c_2}{c_1}\boldsymbol{\beta}-\frac{c_3}{c_1}\boldsymbol{\gamma}$，即 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表出；又 $\boldsymbol{\gamma}=-\frac{c_1}{c_3}\boldsymbol{\alpha}-\frac{c_2}{c_3}\boldsymbol{\beta}$，即 $\boldsymbol{\gamma}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出. 从而知 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性表出，$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性表出，故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 等价，于是

$$L(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=L(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}).$$

例 6 在 P^4 中，求由向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,3,4)$生成的子空间的基与维数. 设

$$(1)\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,1),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,1),\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-3,0),\\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,1,1);\end{cases}\qquad (2)\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,3,-1),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,-3,1),\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(4,5,3,-1),\\ \boldsymbol{\alpha}_4=(1,5,-3,1).\end{cases}$$

解 用矩阵的初等行(列)变换求出基与维数.

(1) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列作矩阵,并作初等行变换,得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1 & 1\\1 & 2 & 1 & 1\\3 & 0 & -3 & 1\\1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 3 & 1\\-1 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的一组基,维数为 3.

(2) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 作列矩阵,并作初等行变换

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 4 & 1\\1 & 1 & 5 & 5\\3 & -3 & 3 & -3\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 2\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\-1 & 1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\boldsymbol{B},$$

知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,是 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$的一组基,维数为 2.

例 7 在 P^4 中,求由齐次方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-\ 5x_3+\ 4x_4=0,\\3x_1-\ x_2+\ 3x_3-\ 3x_4=0,\\3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$$

确定的解空间的基与维数.

解 一组基础解系即解空间一组基,系数矩阵的秩即解空间的维数.因为

$$\begin{bmatrix}3 & 2 & -5 & 4\\3 & -1 & 3 & -3\\3 & 5 & -13 & 11\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/9 & -2/9\\0 & 1 & -8/9 & 7/3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

故解空间是 2 维的,一组基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\frac{1}{9},\frac{8}{3},1,0\right)',\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\left(\frac{2}{9},-\frac{7}{3},0,1\right)'.$$

例 8 求由向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 生成的子空间与由向量 $\boldsymbol{\beta}$ 生成的子空间的交的基和维数.

(1) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,1,0),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,-1,0,1),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(1,-1,3,7);\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,0),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(0,0,1,1),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(0,1,1,0);\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,-2),\\ \boldsymbol{\alpha}_2=(3,1,1,1),\\ \boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,1,-1),\end{cases}$ $\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=(2,5,-6,-5),\\ \boldsymbol{\beta}_2=(-1,2,-7,3).\end{cases}$

解 设 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1\cap V_2$，则有 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2=-y_1\boldsymbol{\beta}_1-y_2\boldsymbol{\beta}_2$，即 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+y_1\boldsymbol{\beta}_1+y_2\boldsymbol{\beta}_2=\mathbf{0}$.

(1) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 代入，得

$$\begin{cases}x_1-x_2+2y_1+y_2=0,\\ 2x_1+x_2-y_1-y_2=0,\\ x_1+x_2+3y_2=0,\\ x_2+y_1+7y_2=0,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x_1=y_2,\\ x_2=-4y_2,\\ y_1=-3y_2,\\ y_2=y_2,\end{cases}$$

所以，$\boldsymbol{\gamma}=y_2(-5,2,3,4)$. 即 $V_1\cap V_2$ 是一维的，$(-5,2,3,4)$是其一组基.

(2) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 代入，得

$$\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_1+y_2=0,\\ x_2+y_1+y_2=0,\\ x_2+y_1=0,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x_1=0,\\ x_2=0,\\ y_1=0,\\ y_2=0,\end{cases}$$

知 $V_1\cap V_2$ 是零空间.

(3) 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 代入，得

$$\begin{cases}x_1+3x_2-x_3+2y_1-y_2=0,\\ 2x_1+x_2+5y_1+2y_2=0,\\ -x_1+x_2+x_3-6y_1-7y_2=0,\\ -2x_1+x_2-x_3-5y_1-3y_2=0,\end{cases}\quad 解得\quad \begin{cases}x_1=3y_1,\\ x_2=-y_1,\\ x_3=-2y_1,\\ y_1=y_1,\\ y_2=0,\end{cases}$$

知 $V_1 \cap V_2$ 是一维的，$\boldsymbol{\beta}_1$ 是其一组基.

例 9 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ x_1=x_2=\cdots=x_n \end{cases}$$

的解空间，证明：$P^n=V_1 \oplus V_2$.

证 因为 P^n 的任一向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 可分解为

$$\boldsymbol{x}=(x_1-t,x_2-t,\cdots,x_n-t)+t(1,1,\cdots,1).$$

取
$$t=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n);$$

则
$$(x_1-t)+(x_2-t)+\cdots+(x_n-t)=0,$$

从而 $(x_1-t,x_2-t,\cdots,x_n-t)\in V_1$，而 $t(1,1,\cdots,1)\in V_2$，故

$$P^n=V_1+V_2.$$

又可由 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 解得 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$，即 $V_1\cap V_2=0$ 成立，故 $P^n=V_1\oplus V_2$.

例 10 证明：若 $V=V_1\oplus V_2$，$V_1=V_{11}\oplus V_{12}$，则

$$V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2.$$

证 $V=V_{11}+V_{12}+V_2$ 是显然的.

再设 $\boldsymbol{\alpha}_{11}+\boldsymbol{\alpha}_{12}+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$，式中 $\boldsymbol{\alpha}_{11}\in V_{11}$，$\boldsymbol{\alpha}_{12}\in V_{12}$，$\boldsymbol{\alpha}_2\in V_2$，则由 $(\boldsymbol{\alpha}_{11}+\boldsymbol{\alpha}_{12})+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$ 及 $V=V_1\oplus V_2$ 可得 $\boldsymbol{\alpha}_{11}+\boldsymbol{\alpha}_{12}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{0}$. 又由 $V_1=V_{11}\oplus V_{12}$ 得 $\boldsymbol{\alpha}_{11}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_{12}=\boldsymbol{0}$. 从而 $V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$.

例 11 证明：每一个 n 维线性空间都可以表成 n 个一维子空间的直和.

证 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 n 维空间 V 的一组基，则 $L(\boldsymbol{\alpha}_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是 V 的一维子空间，且

$$L(\boldsymbol{\alpha}_1)+L(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+L(\boldsymbol{\alpha}_n)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=V.$$

又 $\dim L(\boldsymbol{\alpha}_1)+\dim L(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+\dim L(\boldsymbol{\alpha}_n)=n=\dim(V)$，

所以
$$V=L(\boldsymbol{\alpha}_1)\oplus L(\boldsymbol{\alpha}_2)\oplus\cdots\oplus L(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

例 12 证明：和 $\sum\limits_{i=1}^{s} V_i$ 是直和的充分必要条件是

$$V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j=\{\mathbf{0}\}\ (i=2,\cdots,s).$$

证 充分性 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 都是空间 V 的子空间,又设

$$V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j=\{\mathbf{0}\},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}\ (\boldsymbol{\alpha}_k\in V_k,k=1,2,\cdots,s),$$

则 $\boldsymbol{\alpha}_i=-\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\boldsymbol{\alpha}_{i-1}-\boldsymbol{\alpha}_{i+1}-\cdots-\boldsymbol{\alpha}_s\in V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j=\{\mathbf{0}\}.$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}\ (i=1,2,\cdots,s)$,即 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和.

必要性 设 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和,而 $\boldsymbol{\alpha}\in V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j$,且

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s\in V_i,$$

于是 $$\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+(-\boldsymbol{\alpha})+\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$

因为 $\sum_{i=1}^{s}V_i$ 是直和,所以 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,即 $V_i\cap\sum_{j\neq i}V_j=\{\mathbf{0}\}$.

例 13 在给定了空间直角坐标系的三维空间中,所有自原点引出的向量添上零向量构成一个三维线性空间 $\mathbf{R}^3$.

(1) 问所有终点都在一个平面上的向量是否为子空间;

(2) 设有过原点的三条直线,这三条直线上的全部向量分别成为三个子空间 L_1,L_2,L_3. 问 $L_1+L_2,L_1+L_2+L_3$ 能构成哪些类型的子空间,试全部列举出来.

(3) 用几何空间的例子来说明:若 U,V,X,Y 是子空间,满足 $U+V=X,X\supseteq Y$,是否一定有 $Y=Y\cap U+Y\cap V$?

解 (1) 当终点所在平面过原点时,所有向量构成一个二维子空间. 不过原点的平面不包含零向量,不构成子空间.

(2) 对于 L_1+L_2,若两直线重合,是一维子空间;若两直线不重合,是二维子空间.

对于 $L_1+L_2+L_3$,若三直线重合,是一维子空间;若三直线不在同一平面上,是三维子空间;若三直线在同一平面上,但不重合,

构成二维子空间.

(3) 设 l_1,l_2 为过原点的两条直线，在直线上的全体向量分别构成一维子空间 U 与 V，则 $X=U\oplus V$ 为二维子空间. 若设 l_3 为过原点且在 l_1,l_2 所决定平面上任一条不与 l_1,l_2 重合的直线，令 l_3 上全体向量构成的一维子空间为 Y，则 $Y\subseteq X$，且 $Y\cap U=Y\cap V=\mathbf{0}$，于是 $Y\neq(Y\cap U)\oplus(Y\cap V)$.

例 14 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是一秩为 n 的二次型，证明：存在 $\mathbf{R}^n$ 的一个 $\frac{1}{2}(n-|s|)$ 维子空间 V_1（其中 s 为符号差数，使对任一 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in V_1$，有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$）.

证 因为 f 为二次型，不妨设正惯性指数为 p，负惯性指数为 q，则 $|p-q|=s$，$p+q=n$，且存在可逆阵 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$，使

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+q}^2,$$

并有

$$\frac{1}{2}(n-|s|)=\begin{cases}p & (p<q),\\ q & (p\geqslant q).\end{cases}$$

令

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}p\text{ 个}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}q\text{ 个}\end{matrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}p\text{ 个}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}q\text{ 个}\end{matrix},\quad\cdots,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_p=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}p\text{ 个}\\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}q\text{ 个}\end{matrix},$$

则 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 显然线性无关. 用上面的 $\boldsymbol{C}$ 作方程组 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varepsilon}_i$ $(i=1,2,\cdots,p)$，分别求出解 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$. 作线性组合

$$l_1(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}_1)+l_2(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+l_p(\boldsymbol{C}\boldsymbol{\alpha}_p)=\mathbf{0},$$

即

$$l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+l_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+l_p\boldsymbol{\varepsilon}_p=\mathbf{0},$$

从而知 $l_1=l_2=\cdots=l_p=0$，因此 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关.

任取 $\boldsymbol{x}_0\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p)$，将 $\boldsymbol{x}_0=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_p\boldsymbol{\alpha}_p$ 代入 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$，经整理得

$$\boldsymbol{y}_0=(k_1,\cdots,k_p,k_1,\cdots,k_p,0,\cdots,0)',$$

故 $f=\boldsymbol{x}_0'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$. 知 p 维子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p)$ 即为所求 V_1.

$p\geqslant q$ 情形类似可证.

例 15 设 V_1,V_2 是线性空间 V 的两个非平凡子空间. 证明：在 V 中存在 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_1,\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$ 同时成立.

证 因为 V_1,V_2 是非平凡子空间，所以存在 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$. 若 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_2$，则命题得证；若 $\boldsymbol{\alpha}\in V_2$，另有 $\boldsymbol{\beta}\notin V_2$，此时若 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$，命题也得证. 设 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$，则 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_1,\boldsymbol{\alpha}\in V_2,\boldsymbol{\beta}\in V_1,\boldsymbol{\beta}\notin V_2$.

考虑 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_1$，由 $\boldsymbol{\beta}\in V_1\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}\in V_1$，从而得出矛盾，所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_1$. 类似可证 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\notin V_2$. 于是命题成立.

例 16 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的非平凡子空间. 证明：V 中至少有一个向量不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中任何一个.

证 用数学归纳法证.

$s=2$ 时，即例 15 情形，已经证明.

设 $s=k$ 时命题成立.

对于 $s=k+1$，设 $V_1,V_2,\cdots,V_{k+1}$ 为 V 的非平凡子空间，由 $s=k$ 时命题成立知，至少有一 $\boldsymbol{\alpha}$ 不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 中任何一个. 下面用反证法证命题成立.

若 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_{k+1}$，则命题成立；若 $\boldsymbol{\alpha}\in V_{k+1}$，则取 $\boldsymbol{\beta}\notin V_{k+1}$，作向量组

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\cdots,(k+1)\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}, \qquad ①$$

式①中必有一个向量不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 中的任何一个. 否则，式中一定有两个向量同属某一 V_j $(1\leqslant j\leqslant k)$，从而两向量差 $m\boldsymbol{\alpha}(0\leqslant|m|\leqslant k)$ 也属于 V_j，这与 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_j$ 矛盾.

设式①中向量 $\boldsymbol{\gamma}=l\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ 不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_k$ 中任何一个，则因为 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_{k+1},\boldsymbol{\beta}\in V_{k+1}\Longrightarrow\boldsymbol{\gamma}\notin V_{k+1}$，知 $\boldsymbol{\gamma}$ 不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_k,V_{k+1}$ 中任何一个.

例 17 设 V_1 与 V_2 是 n 维线性空间 V 的两个子空间，且 $\dim(V_1+V_2)=\dim(V_1\cap V_2)+1$. 证明：$V_1\subseteq V_2$ 或 $V_2\subseteq V_1$.

证 因为 $\dim V_1+\dim V_2=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$，则由题设得 $\dim V_1+\dim V_2=2\dim(V_1\cap V_2)+1$. 显然，

$$\dim(V_1\cap V_2)\subseteq\dim V_1,\quad \dim(V_1\cap V_2)\subseteq\dim V_2.$$

当不等式严格时，有

$$\dim(V_1\cap V_2)+1\leqslant\dim V_1,\quad \dim(V_1\cap V_2)+1\leqslant\dim V_2.$$

故有 $2\dim(V_1\cap V_2)+2\leqslant\dim V_1+\dim V_2$，与前面结果矛盾. 因此，或者 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1$，或者 $\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_2$，即 $V_1\cap V_2=V_1$ 或 $V_1\cap V_2=V_2$，故命题成立.

例 18 设 $V_1=\{\boldsymbol{A}\in M_n(K)\mid \boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}\}$，$V_2=\{\boldsymbol{A}\in M_n(K)\mid \boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}\}$，证明：$M_n(K)=V_1\oplus V_2$.

证 V_1,V_2 显然是 $M_n(K)$ 的子空间. 设 $\boldsymbol{A}\in M_n(K)$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，式中 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')$，$\boldsymbol{C}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}')$. 因为 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}'=-\boldsymbol{C}$，所以 $\boldsymbol{B}\in V_1$，$\boldsymbol{C}\in V_2$，于是 $M_n(K)=V_1+V_2$.

若 $\boldsymbol{A}\in V_1\cap V_2$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'$ 且 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}'$，所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}'=-\boldsymbol{A}\Longrightarrow 2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$，因此 $V_1\cap V_2=\boldsymbol{0}$，$M_n(K)=V_1\oplus V_2$.

证明 $V=V_1\oplus V_2$，一种是直接从定义证；另一种先验证 $V=V_1+V_2$，再验算 $\dim V=\dim V_1+\dim V_2$，(要求 V_1,V_2 的维数易于求得).

第五节 线性空间的同构

主要内容

1. 定义 设 V 与 V' 是数域 P 上的两个线性空间，若存在由 V 到 V' 的双射 σ，满足：

(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$，

(2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$,

式中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,$k\in P$;则 σ 称为**同构映射**,V 与 V' 称为**同构的**,记为 $V\simeq V'$.

数域 P 上任一个 n 维线性空间都与 P^n 同构.

2. 同构映射具有以下基本性质:

(1) $\sigma(\mathbf{0})=0,\sigma(-\boldsymbol{\alpha})=-\sigma(\boldsymbol{\alpha})$.

(2) $\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r)=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r\sigma(\boldsymbol{\alpha}_r)$.

(3) V 中向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关的充分必要条件是它们的像 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1),\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\sigma(\boldsymbol{\alpha}_r)$线性相关.

(4) 若 V_1 是 V 的一个线性子空间,则 V_1 在 σ 下的像集合 $\sigma(V_1)=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in V_1\}$ 是 $\sigma(V)$ 的子空间,且 V_1 与 $\sigma(V_1)$ 维数相同.

(5) 同构映射的逆映射以及两个同构映射的乘积仍是同构映射.

3. 定理 数域 P 上两个有限维线性空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

疑 难 解 析

当 X 表示数域 P 上一切线性空间集合时,为什么说同构关系 $\simeq$ 是 X 的等价关系?

答 因为,对任意的 $V_1,V_2,V_3\in X$,都有:

(1) 反身性 $V_1\simeq V_1$;只要令 $\sigma:\boldsymbol{\alpha}\mapsto\boldsymbol{\alpha},\forall\boldsymbol{\alpha}\in V_1$.

(2) 对称性 若 $V_1\simeq V_2$,σ 是 V_1 与 V_2 的同构映射,则 σ 的逆映射就是 V_2 与 V_1 的同构映射,即 $V_2\simeq V_1$.

(3) 传递性 若 $V_1\simeq V_2,V_2\simeq V_3$,令 σ_1,σ_2 分别是 V_1 与 V_2,V_2 与 V_3 的同构映射,则 $\sigma_1\sigma_3$ 是 V_1 与 V_3 的同构映射,即有 $V_1\simeq V_3$.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 证明：实数域作为它自身上的线性空间与由全体正实数 $\mathbf{R}^+$，加法 $a\oplus b=ab$，数乘 $ka=a^k$ 构成的线性空间同构.

证 由第二节例 2(8)已知，全体正实数 $\mathbf{R}^+$ 对加法 $a\oplus b=ab$，数乘 $ka=a^k$ 构成实数域上的线性空间. 因为它们都是实数域上的一维线性空间，所以同构.

例 2 证明：复数域上的二阶方阵的集合 $M_2(\boldsymbol{C})$ 作为实数域 P 上的线性空间与 $P^{(8)}$ 同构.

证 容易验证向量组

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}i&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&i\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\i&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&i\end{bmatrix}$$

是 $M_2(\boldsymbol{C})$ 的一组基，由此知 $M_2(\boldsymbol{C})$ 是 8 维向量空间. 而 $P^{(8)}$ 也是 8 维线性空间，所以它们同构.

例 3 证明：$P[x]$与它的真子空间同构.

证 作 $P_0[x]$是一切 P 上常数项为零的多项式构成的线性空间，$P_0[x]$是 $P[x]$的真子空间.

作 $\sigma: f(x)\mapsto xf(x)$. 当 $f(x)\neq g(x)$时，$xf(x)\neq xg(x)$，故 σ 是单射. 又对任取 $h(x)\in P_0[x]$，都有 $h(x)=xh_1(x)$，式中 $h_1(x)\in P[x]$，所以 σ 是满射.

可以验证，对任意 $f(x),g(x)\in P[x]$，都有

$$\sigma(f(x)+g(x))=x(f(x)+g(x))=\sigma(f(x))+\sigma(g(x)),$$

$$\sigma(kf(x))=x(kf(x))=k(xf(x))=k\sigma(f(x)),$$

从而
$$P[x]\simeq P_0[x].$$

第七章　线性变换

线性变换的概念就是线性函数的发展和一般化.本章在了解线性变换定义、性质和运算的基础上讨论线性变换与子空间的关系,强调不变子空间及导出线性变换在分解化简线性变换方面的作用与意义,研究线性变换的矩阵、特征值与特征向量等问题.

第一节　线性变换的定义与运算

主要内容

1. 定义1　设$\mathscr{A}$为线性空间V的一个变换,若对于V中任意元素$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$和数域$P$中任意数$k$,都有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\quad \mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}).$$

则$\mathscr{A}$称为V的一个**线性变换**.

$\boldsymbol{\alpha}\to k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\in V$称由$k$决定的**数乘变换**.

$\mathscr{E}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\in V$,称为恒等变换(单位变换).

$\mathscr{O}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha}\in V$,称为零变换.

2. 线性变换有以下简单性质:

(1) 设$\mathscr{A}$是V的线性变换,则$\mathscr{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0},\mathscr{A}(-\boldsymbol{\alpha})=-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$.

(2) 线性变换保持线性组合与线性关系式不变,即:若

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,$$

则
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r);$$

若
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

则
$$k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r)=\mathbf{0}.$$

(3) 线性变换把线性相关的向量组变成线性相关的向量组.

3. **定义 2** 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是线性空间 V 的两个线性变换，它们的**乘积** $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 也是线性变换，有

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})),\quad \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

乘法满足结合律：$(\mathscr{A}\mathscr{B})\mathscr{C}=\mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C})$.

乘法一般不满足交换律.

4. **定义 3** 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是线性空间 V 的两个线性变换，它们的和 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ 也是线性变换，有

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\quad \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

加法满足交换律：$\mathscr{A}+\mathscr{B}=\mathscr{B}+\mathscr{A}$.

加法满足结合律：$\mathscr{A}+(\mathscr{B}+\mathscr{C})=(\mathscr{A}+\mathscr{B})+\mathscr{C}$.

加法满足分配律：

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}+\mathscr{C})=\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{A}\mathscr{C},\quad (\mathscr{B}+\mathscr{C})\mathscr{A}=\mathscr{B}\mathscr{A}+\mathscr{C}\mathscr{A},$$

且有 $\mathscr{A}+\mathscr{O}=\mathscr{A},(-\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha})=-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}+(-\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

5. **定义 4** 数域 P 中数 k 与线性变换的**数量乘法**为 $k\mathscr{A}=\mathscr{K}\mathscr{A}$. 数量乘法满足

$$(kl)\mathscr{A}=k(l\mathscr{A}),\quad (k+l)\mathscr{A}=k\mathscr{A}+l\mathscr{A},$$
$$k(\mathscr{A}+\mathscr{B})=k\mathscr{A}+k\mathscr{B},1\mathscr{A}=\mathscr{A}.$$

线性空间 V 上全体线性变换对于 4、5 中定义的加法与数量乘法构成数域 P 上的一个线性空间.

6. **定义 5** 若有 V 的变换 $\mathscr{B}$ 存在，使得对于 V 的变换 $\mathscr{A}$ 有 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$，则称 $\mathscr{B}$ 为 $\mathscr{A}$ 的**逆变换**，记为 $\mathscr{A}^{-1}$. 若线性变换 $\mathscr{A}$ 是可逆的，则 $\mathscr{A}^{-1}$ 也是线性变换.

7. $\underbrace{\mathscr{A}\mathscr{A}\cdots\mathscr{A}}_{n}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的 **n 次幂**，记为 $\mathscr{A}^n$. 令 $\mathscr{A}^0=\mathscr{E}$. 有

$$\mathscr{A}^{m+n}=\mathscr{A}^m\cdot\mathscr{A}^n,\quad (\mathscr{A}^m)^n=\mathscr{A}^{mn},\quad m,n\geqslant 0.$$
$$\mathscr{A}^{-n}=(\mathscr{A}^{-1})^n,\quad n\in\mathbf{N}^+.$$

$f(\mathscr{A})=a_m\mathscr{A}^m+a_{m-1}\mathscr{A}^{m-1}+\cdots+a_0\mathscr{E}$ 是一线性变换，称为线性变换 $\mathscr{A}$ 的多项式.

在 $P[x]$ 中，若 $h(x)=f(x)+g(x),p(x)=f(x)g(x)$.

则 $h(\mathscr{A})=f(\mathscr{A})+g(\mathscr{A}),\quad p(\mathscr{A})=f(\mathscr{A})g(\mathscr{A})=g(\mathscr{A})f(\mathscr{A})$.

8. 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是几何空间中一固定的非零向量，把每个向量 $\boldsymbol{\zeta}$ 变到它在 $\boldsymbol{\alpha}$ 上的内射影的变换是线性变换，记为

$$\Pi_{\alpha}(\boldsymbol{\zeta})=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\zeta})}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\alpha}.$$

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为空间的两个向量，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 相互垂直的充分必要条件是 $\Pi_{\alpha}\cdot\Pi_{\beta}=\mathscr{O}$.

疑 难 解 析

线性变换与一般的映射有什么不同?

答 函数、映射与变换都是一类对应关系的反映，它们是同一概念. 习惯上，把数学分析中变量之间的对应关系称为函数，$w=f(z)$反映在确定的对应法则下，集合 G 中的数 z 与集合 G^* 中数 w 的对应关系；在几何中，把两个点集之间的对应关系称为映射，$w=f(z)$反映 z 平面上一个点集 G 与 w 平面上一个点集 G^* 的对应关系；在代数中，把变量之间的对应关系称为变换，$w=f(z)$反映集合 G 的元素 z 到集合 G^* 的元素 w 的对应关系.

在线性代数里，将线性空间 V 到自身的一种特定映射称为线性变换. 即线性变换是线性空间到自身(而不是其他空间)的映射，它保持向量的加法与数量乘法，即对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k\in P$，有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\quad \mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}).$$

方法、技巧与典型例题分析

熟悉线性变换的定义与性质，能够判断所给变换是否线性. 掌握线性变换的运算，熟练运用运算性质讨论有关命题.

例 1 证明：若 $\mathscr{A}$ 是线性变换，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是一组线性相关的向量，则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$也是一组线性相关的向量.

证 因为存在不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$

所以 $$\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathscr{A}(\mathbf{0})=\mathbf{0},$$
即 $$k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_s\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0},$$
故 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$线性相关.

但是,由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_s)$线性相关不能得出 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.如零变换可以把线性无关的向量都变为 $\mathbf{0}$,而零向量是线性相关的.

由例 1 还可得出

$$秩(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_n))\leqslant秩(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n).$$

例 2 判别下面所定义的变换哪些是线性的,哪些不是?

(1) 在线性空间 V 中,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定的向量;

(2) 在线性空间 V 中,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{\alpha}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 是一固定的向量;

(3) 在 P^3 中,$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$;

(4) 在 P^3 中,$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_3)$;

(5) 在 $P[x]$中,$\mathscr{A}(f(x))=f(x+1)$;

(6) 在 $P[x]$中,$\mathscr{A}(f(x))=f(x_0)$,其中 $x_0\in P$ 是固定的数;

(7) 把复数域看作复数域上的线性空间,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\overline{\boldsymbol{\xi}}$;

(8) 在 $P^{n\times n}$中,$\mathscr{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in P^{n\times n}$是两个固定的矩阵.

解 (1)当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,$\mathscr{A}$ 显然是线性变换.

当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时,因为 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\alpha}$,而 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2+2\boldsymbol{\alpha}$,所以 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)\neq\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_2)$,故 $\mathscr{A}$ 不是线性变换.

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时,$\mathscr{A}$ 显然是线性变换.

当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时,因为 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\alpha}$,而 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_2)=2\boldsymbol{\alpha}$,所以 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)\neq\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_2)$,故 $\mathscr{A}$ 不是 V 的线性变换.

(3) 不是.因为,若取$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$,则 $\mathscr{A}(2(1,0,0))=\mathscr{A}(2,0,0)=(4,0,0)$,而 $2\mathscr{A}(1,0,0)=2(1,0,0)=(2,0,0)$,即 $\mathscr{A}(k(x_1x_2x_3))\neq k\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)$.

(4) 是. 对(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3),可以验证

$$\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)+\mathscr{A}(y_1,y_2,y_3)=\mathscr{A}(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3),$$
$$\mathscr{A}k(x_1,x_2,x_3)=\mathscr{A}(kx_1,kx_2,kx_3)=k\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3).$$

(5)是. 对 $f(x),g(x)\in P[x]$,若 $h(x)=f(x)+g(x)$,$q(x)=kf(x)$,则

$$h(x+1)=f(x+1)+g(x+1),q(x+1)=kf(x+1),$$

从而
$$\begin{aligned}\mathscr{A}(f(x)+g(x))&=\mathscr{A}(h(x))=h(x+1)\\&=f(x+1)+g(x+1)\\&=\mathscr{A}f(x)+\mathscr{A}g(x),\end{aligned}$$
$$\mathscr{A}(kf(x))=\mathscr{A}(q(x))=kf(x+1)=k\mathscr{A}(f(x)).$$

(6)是. 对任意 $f(x)\in P[x]$,$g(x)\in P[x]$,有

$$\mathscr{A}(f(x)+g(x))=f(x_0)+g(x_0)=\mathscr{A}(f(x))+\mathscr{A}(g(x)),$$
$$\mathscr{A}(kf(x))=kf(x_0)=k\mathscr{A}(f(x)).$$

(7) 不是. 因为,若取 $\boldsymbol{\xi}=1$,$k=\mathrm{i}$,则

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\xi})=\overline{k\boldsymbol{\xi}}=-\mathrm{i},$$

而 $k\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=k\bar{\boldsymbol{\xi}}=\mathrm{i}$,所以

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\xi})\neq k\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}).$$

(8) 是. 因为,$\forall\, \boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}$,

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{C}=\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_1)+\mathscr{A}(\boldsymbol{X}_2),$$
$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{X})=\boldsymbol{B}(k\boldsymbol{X})\boldsymbol{C}=k(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}\boldsymbol{C})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{X}).$$

例 3 在几何空间中,取正交坐标系 $Oxyz$,以 $\mathscr{A}$ 表示将空间绕 Ox 轴由 Oy 向 Oz 方向旋转 90°的变换,以 $\mathscr{B}$ 表示绕 Oy 轴由 Oz 向 Ox 方向旋转 90°的变换,以 $\mathscr{C}$ 表示绕 Oz 轴由 Ox 向 Oy 方向旋转 90°的变换. 证明:

$$\mathscr{A}^4=\mathscr{B}^4=\mathscr{C}^4=\mathscr{E},\quad \mathscr{A}\mathscr{B}\neq\mathscr{B}\mathscr{A}\quad 但\quad \mathscr{A}^2\mathscr{B}^2=\mathscr{B}^2\mathscr{A}^2.$$

并检验$(\mathscr{A}\mathscr{B})^2=\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2$是否成立.

证 任取一向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x,y,z)$,由题设,

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=(x,-z,y),\quad \mathscr{A}^2(\boldsymbol{\alpha})=(x,-y,-z),$$
$$\mathscr{A}^3(\boldsymbol{\alpha})=(x,z,-y),\quad \mathscr{A}^4(\boldsymbol{\alpha})=(x,y,z);$$

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})=(z,y,-x),\quad \mathscr{B}^2(\boldsymbol{\alpha})=(-x,y,-z),$$
$$\mathscr{B}^3(\boldsymbol{\alpha})=(-z,y,x),\quad \mathscr{B}^4(\boldsymbol{\alpha})=(x,y,z);$$
$$\mathscr{C}(\boldsymbol{\alpha})=(-y,x,z),\quad \mathscr{C}^2(\boldsymbol{\alpha})=(-x,-y,z),$$
$$\mathscr{C}^3(\boldsymbol{\alpha})=(y,-x,z),\quad \mathscr{C}^4(\boldsymbol{\alpha})=(x,y,z).$$

所以 $$\mathscr{A}^4=\mathscr{B}^4=\mathscr{C}^4=\mathscr{E}.$$

由 $$(\mathscr{A}\mathscr{B})\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}(\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(z,y,-x)=(z,x,y),$$

而 $$(\mathscr{B}\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{B}(x,-z,y)=(y,-z,-x).$$

所以 $$\mathscr{A}\mathscr{B}\neq\mathscr{B}\mathscr{A}.$$

又 $$(\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2)\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}^2(\mathscr{B}^2\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}^2(-x,y,-z)=(-x,-y,z),$$

而 $$(\mathscr{B}^2\mathscr{A}^2)\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}^2(\mathscr{A}^2\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{B}^2(x,-y,-z)=(-x,-y,z).$$

所以 $$\mathscr{A}^2\mathscr{B}^2=\mathscr{B}^2\mathscr{A}^2.$$

例 4 在 $P[x]$中，$\mathscr{A}(f(x))=f'(x)$，$\mathscr{B}(f(x))=xf(x)$，证明：$\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$.

证 因为

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}\mathscr{B})f(x)&=\mathscr{A}(\mathscr{B}f(x))=\mathscr{A}(xf(x))=[xf(x)]'\\&=f(x)+xf'(x)=\mathscr{E}(f(x))+\mathscr{B}(f'(x))\\&=\mathscr{E}(f(x))+\mathscr{B}(\mathscr{A}f(x))=(\mathscr{E}+\mathscr{B}\mathscr{A})f(x),\end{aligned}$$

所以 $$\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}.$$

例 5 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是线性变换，若 $\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{E}$，证明：$\mathscr{A}^k\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}^k=k\mathscr{A}^{k-1}$，$k>1$.

证 对 k 使用数学归纳法进行证明.

当 $k=1$ 时，$\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}^0=\mathscr{E}$，命题成立.

设对 k 命题成立，即有 $\mathscr{A}^k\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}^k=k\mathscr{A}^{k-1}$.

对 $k+1$，因为

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{k+1}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}^{k+1}&=\mathscr{A}^k(\mathscr{A}\mathscr{B})-\mathscr{B}\mathscr{A}^{k+1}=\mathscr{A}^k(\mathscr{E}+\mathscr{B}\mathscr{A})-\mathscr{B}\mathscr{A}^{k+1}\\&=\mathscr{A}^k+(\mathscr{A}^k\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}^k)\mathscr{A}\\&=\mathscr{A}^k+k\mathscr{A}^{k-1}\cdot\mathscr{A}=(k+1)\mathscr{A}^k,\end{aligned}$$

所以命题也成立. 从而对任何正整数都成立.

例 6 证明：可逆变换是双射.

证 设 $\mathscr{A}$ 是可逆变换，$\mathscr{A}^{-1}$ 是其逆变换.

$\forall \boldsymbol{\xi} \neq \boldsymbol{\eta}$，必有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}) \neq \mathscr{A}(\boldsymbol{\eta})$. 否则，设 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}) = \mathscr{A}(\boldsymbol{\eta})$，两端左乘 $\mathscr{A}^{-1}$，得 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\eta}$，与所设矛盾.

又 $\forall \boldsymbol{\eta} \in V$，必有 $\boldsymbol{\xi}$ 使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta}$，这只需令 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\xi}$ 即可.

从而知 $\mathscr{A}$ 是 1-1 的和映上的，所以是双射.

例 7 设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 是线性变换，$\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}, \mathscr{B}^2 = \mathscr{B}$，证明：

(1) 若 $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^2 = \mathscr{A}+\mathscr{B}$，则 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{O}$；

(2) 若 $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$，则 $(\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B})^2 = \mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B}$.

证 (1)因为 $(\mathscr{A}+\mathscr{B})^2 = \mathscr{A}^2 + \mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{B}\mathscr{A} + \mathscr{B}^2 = \mathscr{A}+\mathscr{B}$，所以 $\mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{O}$，即 $\mathscr{A}\mathscr{B} = -\mathscr{B}\mathscr{A}$.

$$\text{又 } 2\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}^2\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}^2$$
$$= \mathscr{A}^2\mathscr{B} + \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}^2(\mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{B}\mathscr{A}) = \mathscr{A}\mathscr{O} = \mathscr{O},$$

所以
$$\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{O}.$$

(2) $(\mathscr{A}+\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{B})^2$

$= \mathscr{A}^2 + \mathscr{B}\mathscr{A} - \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A} + \mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{B}^2 - \mathscr{A}\mathscr{B}^2 - \mathscr{A}^2\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{B}$

$= \mathscr{A} + \mathscr{B}\mathscr{A} - \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A} + \mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{B} - \mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{A}\mathscr{B} - \mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{B} + \mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{B}$

$= \mathscr{A} + \mathscr{B} - \mathscr{A}\mathscr{B}$.

例 8 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间. 证明：由 V 的全体线性变换组成的线性空间是 n^2 维的.

证 用 W 表示 V 的全体线性变换作成的线性空间，则 W 与 $P^{n\times n}$ 同构. 由于 $P^{n\times n}$ 是 n^2 维的，而同构的线性空间维数相同，故 W 是 n^2 维的.

例 9 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维空间 V 的一个线性变换，证明：

(1) 在 $P[x]$ 中有次数小于或小于 n^2 的多项式，使 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$；

(2) 若 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}, g(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$，则 $d(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$，这里 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式；

(3) $\mathscr{A}$ 可逆的充分必要条件是，有一常数项不为零的多项式 $f(x)$ 使 $f(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$.

证 (1) 数域 P 上 n 维空间 V 的线性变换组成的空间是 n^2 维的，从而 n^2+1 个线性变换 $\mathscr{A}^{n^2},\mathscr{A}^{n^2-1},\cdots,\mathscr{A},\mathscr{E}$ 必线性相关，所以有不全为零的数 $a_{n^2},a_{n^2-1},\cdots,a_1,a_0$，使

$$a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}+a_{n^2-1}\mathscr{A}^{n^2-1}+\cdots+a_1\mathscr{A}+a_0\mathscr{E}=\mathscr{O}.$$

故令
$$f(x)=a_{n^2}x^{n^2}+a_{n^2-1}x^{n^2-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$
则由 $a_{n^2},a_{n^2-1},\cdots,a_1,a_0$ 不全为零知，$\partial(f(x))\leqslant n^2$，即在 $P[x]$ 中有一次数 $\leqslant n^2$ 的多项式 $f(x)$，使 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

(2) 由最大公因式定义知，存在 $u(x),v(x)$，使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

因为
$$f(\mathscr{A})=\mathscr{O},\quad g(\mathscr{A})=\mathscr{O},$$
所以
$$d(\mathscr{A})=u(\mathscr{A})f(\mathscr{A})+v(\mathscr{A})g(\mathscr{A})=\mathscr{O}.$$

(3) 充分性　设

$$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_0\neq0),$$

而 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$，则

$$a_m\mathscr{A}^m+a_{m-1}\mathscr{A}^{m-1}+\cdots+a_1\mathscr{A}=-a_0\mathscr{E},$$

即
$$-\frac{1}{a_0}(a_m\mathscr{A}^{m-1}+a_{m-1}\mathscr{A}^{m-2}+\cdots+a_1\mathscr{E})\mathscr{A}=\mathscr{E},$$
从而知 $\mathscr{A}$ 可逆.

必要性　由题(1)知在 $P[x]$ 中存在一次数 $\leqslant n^2$ 的多项式 $f(x)$，使 $f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$. 故

当 $a_0\neq0$ 时，$f(x)$ 即为所求.

当 $a_0=0$ 时，必存在某 $a_j\neq0$（如不止一个，则取 j 为最小的一个），得

$$a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2}+a_{n^2-1}\mathscr{A}^{n^2-1}+\cdots+a_j\mathscr{A}^j=\mathscr{O}.$$

因为 $\mathscr{A}$ 可逆，用 $(\mathscr{A}^j)^{-1}$ 右乘上式两边，则有

$$a_{n^2}\mathscr{A}^{n^2-j}+a_{n^2-1}\mathscr{A}^{n^2-j-1}+\cdots+a_j\mathscr{E}=\mathscr{O}.$$

令 $f(x)=a_{n^2}x^{n^2-j}+a_{n^2-1}x^{n^2-j-1}+\cdots+a_j$，此 $f(x)$ 即为所求.

例 10　在 $M_2(P)$ 中，设线性变换

$$\mathscr{A}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},\quad \mathscr{B}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \mu d \end{bmatrix},$$

求 $\mathscr{A}+\mathscr{B}$，$\mathscr{A}\mathscr{B}$.

解 对任意的 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in M_2(P)$，有

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}+\mathscr{B})\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}&=\mathscr{A}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}+\mathscr{B}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda d \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} a+b & a-b \\ c+d & c-d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda d \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} (\lambda+1)a+b & a-b \\ c+d & (\mu-1)d+c \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}\mathscr{B})\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}&=\mathscr{A}\left(\mathscr{B}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\mathscr{A}\begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda d \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} \lambda a & 0 \\ 0 & \lambda d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda a \\ \mu d & -\mu d \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 11 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 V 的线性变换，定义 $[\mathscr{A},\mathscr{B}]=\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A}$，证明：对任意 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}$ 以下等式成立，即

$$([\mathscr{C},\mathscr{A}],\mathscr{B})+([\mathscr{A},\mathscr{B}],\mathscr{C})+([\mathscr{B},\mathscr{C}],\mathscr{A})=\mathscr{O}.$$

证 由题设定义可得

$$\begin{aligned}&([\mathscr{C},\mathscr{A}],\mathscr{B})+([\mathscr{A},\mathscr{B}],\mathscr{C})+([\mathscr{B},\mathscr{C}],\mathscr{A})\\ &=(\mathscr{C}\mathscr{A}-\mathscr{A}\mathscr{C},\mathscr{B})+(\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A},\mathscr{C})+(\mathscr{B}\mathscr{C}-\mathscr{C}\mathscr{B},\mathscr{C})\\ &=(\mathscr{C}\mathscr{A}-\mathscr{A}\mathscr{C})\mathscr{B}-\mathscr{B}(\mathscr{C}\mathscr{A}-\mathscr{A}\mathscr{C})+(\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A})\mathscr{C}\\ &\quad-\mathscr{C}(\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{A})+(\mathscr{B}\mathscr{C}-\mathscr{C}\mathscr{B})\mathscr{A}-\mathscr{A}(\mathscr{B}\mathscr{C}-\mathscr{C}\mathscr{B})\\ &=\mathscr{C}\mathscr{A}\mathscr{B}-\mathscr{A}\mathscr{C}\mathscr{B}-\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{A}+\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{C}+\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}-\mathscr{B}\mathscr{A}\mathscr{C}\\ &\quad-\mathscr{C}\mathscr{A}\mathscr{B}+\mathscr{C}\mathscr{B}\mathscr{A}+\mathscr{B}\mathscr{C}\mathscr{A}-\mathscr{C}\mathscr{B}\mathscr{A}-\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C}+\mathscr{A}\mathscr{C}\mathscr{B}\\ &=\mathscr{O}.\end{aligned}$$

例 12 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 n 维空间 V 的一组基，$\mathscr{A}$ 是 V 上的

线性变换. 证明:$\mathscr{A}$可逆当且仅当$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$线性无关.

证 必要性 设$\mathscr{A}$可逆,则$\mathscr{A}^{-1}$存在,且$\mathscr{A}^{-1}$也是V的线性变换. 若$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$线性相关,则$\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1)$,$\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n)$即$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$也线性相关,与题设矛盾. 故$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$线性无关.

充分性 若$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$线性无关,则它也是$V$的一组基,则$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$,存在$k_1,k_2,\cdots,k_n$,使

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=k_1(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1)+k_2(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+k_n(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

从而知$\mathscr{A}$为V的满射变换. 若又有

$$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+l_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+l_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}_1,$$

即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+k_n\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n),$$

则因$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$是一组基,故$l_i=k_i$,即$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,所以$\mathscr{A}$是单射变换. 综合知$\mathscr{A}$是可逆变换.

第二节　线性变换的矩阵

主要内容

1. 定理 1 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$是线性空间$V$的一组基,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$V$中的任意$n$个向量,则存在唯一的线性变换$\mathscr{A}$使得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\alpha}_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

2. 定义 1 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$是数域$P$上$n$维线性空间$V$的一组基,$\mathscr{A}$是$V$中的一个线性变换,基向量的像可以被基线性表出:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)&=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+a_{n1}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)&=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{n2}\boldsymbol{\varepsilon}_n,\\&\vdots\\\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)&=a_{1n}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2n}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nn}\boldsymbol{\varepsilon}_n.\end{aligned}$$

用矩阵表示为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$$
$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}, \qquad ①$$

式中
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为 $\mathscr{A}$ **在基** $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ **下的矩阵**.

3. 定理 2 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一组基，在这组基下，每个线性变换按式①对应一个 $n\times n$ 矩阵，这个对应具有以下性质：

(1) 线性变换的和对应于矩阵的和；

(2) 线性变换的乘积对应于矩阵的乘积；

(3) 线性变换的数量乘积对应于矩阵的数量乘积；

(4) 可逆的线性变换与可逆矩阵对应，且逆变换对应于逆矩阵.

4. 定理 3 设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是 $\boldsymbol{A}$，向量 $\boldsymbol{\xi}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标是 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 可以按公式

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n)'=\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$$

计算.

5. 定理 4 设线性空间 V 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在两组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 和 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，从第一组基到第二组基的过渡矩阵为 $\boldsymbol{X}$，则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$.

6. 定义 2 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为数域 P 上两个 n 级矩阵，如果可以找到数域 P 上的 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{X}$，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，就说 $\boldsymbol{A}$ **相似于** $\boldsymbol{B}$，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

相似是矩阵之间的一种关系，具有性质：

(1) 反身性 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$；

(2) 对称性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$;

(3) 传递性　若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

7. 定理 5　线性变换在不同基下所对应的矩阵是相似的;反之,若两个矩阵相似,则它们可看作同一线性变换在两组基下所对应的矩阵.

矩阵的相似运算有如下性质:

若 $$\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{X},$$

则 $$\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{X},\quad \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2=\boldsymbol{X}^{-1}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{X}.$$

由此可知,若 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,且 $f(x)$ 是数域 P 上的一个多项式,则有

$$f(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{X}^{-1}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}.$$

疑 难 解 析

怎样求线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵?

答　(1) 用定义求. 由定义 1 知,只要计算基向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的像 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 上的坐标列,将其作为 $\boldsymbol{A}$ 的各列,形式地记为

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n))=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}.$$

(2)用公式 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n))=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$ 求.

(i) 当 V 是 n 数组列向量空间 P^n 时,$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n))$ 与 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 均可视作方阵,可按通常矩阵乘法进行. 因为 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 可逆,所以

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)^{-1}(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)).$$

(ii) 当 V 是任意的 n 维线性空间 $V_n(P)$ 时,取定一组基后,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n),\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的坐标列仍满足上述公式,仍可用(i)所述方法进行. 求得的 $\boldsymbol{A}$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 上的方阵表示.

(3) 用公式 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. 因为,设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的方阵为 $\boldsymbol{A}$,若 $\boldsymbol{\beta}_1=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\boldsymbol{\beta}_2=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\boldsymbol{\beta}_n=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$,且已知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 在此基上的坐标列为 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n;\boldsymbol{y}_1,$

$\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n$，则 $\boldsymbol{\beta}_i=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的坐标式为 $\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，即

$$(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)=(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_2),\cdots,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_n))=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n).$$

若 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n$ 线性无关，则得

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\cdots,\boldsymbol{y}_n)(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n)^{-1}.$$

方法、技巧与典型例题分析

对于数域 P 上的线性空间 V，当它的一组基取定之后，每个线性变换对应于一个 $n\times n$ 矩阵. 在不同的基下有不同的矩阵，这些矩阵是彼此相似的. 因此，我们必须熟悉关于线性变换在给定基下的矩阵的定义与定理，能够求解线性变换在给定基下的表示矩阵和不同基之间的过渡矩阵.

例 1 求下列线性变换在所指定基下的矩阵.

(1) 在 P^3 中，求 $\mathscr{A}(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0)$，$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

(2) $[O;\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2]$ 是平面上一直角坐标系，$\mathscr{A}$ 是平面上的向量对第一和第三象限角的平分线的垂直投影，$\mathscr{B}$ 是平面上的向量对 $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 的垂直投影，求 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵；

(3) 在空间 $P[x]$ 中，设变换 $\mathscr{A}$ 为 $f(x)\to f(x+1)-f(x)$. $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_0=1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_i=\dfrac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 下的矩阵；

(4) 六个函数

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=x\mathrm{e}^{ax}\cos bx,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_4=x\mathrm{e}^{ax}\sin bx,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_5=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{ax}\cos bx,\quad \boldsymbol{\varepsilon}_6=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{ax}\sin bx$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维线性空间，求微分变换 $\mathscr{D}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ $(i=1,2,\cdots,6)$ 下的矩阵；

(5) 已知 P^3 中线性变换 $\mathscr{A}$ 在基

$$\boldsymbol{\eta}_1=(-1,1,1),\quad \boldsymbol{\eta}_2=(1,0,-1),\quad \boldsymbol{\eta}_3=(0,1,1)$$

下的矩阵是
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

(6) 在 P^3 中定义 $\mathscr{A}$ 如下.

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1)=(-5,0,3), \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_2)=(0,-1,6), \\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_3)=(-5,-1,9), \end{cases} \quad 其中 \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_1=(-1,0,2), \\ \boldsymbol{\eta}_2=(0,1,1), \\ \boldsymbol{\eta}_3=(3,-1,0). \end{cases}$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

(7) 同题(6),求 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

解 (1) 由 $\mathscr{A}$ 的定义得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(2,0,1),\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(-1,1,0),\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(0,1,0).$$

因为任何三维向量在单位基下的坐标为其分量,所以

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}.$$

$\boldsymbol{A}$ 即为所求.

(2)由题设知,$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1)$,而

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

又 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{0}=0\boldsymbol{\varepsilon}_1+0\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{B}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{\varepsilon}_2=0\boldsymbol{\varepsilon}_1+1\boldsymbol{\varepsilon}_2$,故 $\mathscr{B}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

故 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

(3) 由 $\mathscr{A}$ 定义可得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_0)=1-1=0,\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\mathscr{A}(x)=(x+1)-x=\boldsymbol{\varepsilon}_0,$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\mathscr{A}\left(\frac{x(x-1)}{2}\right)=\frac{(x+1)x}{2}-\frac{x(x-1)}{2}=x=\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1},\ \cdots,\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1})=\boldsymbol{\varepsilon}_{n-2}.$$

所以由此得到 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{n-1}$ 下的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

(4) 因为 $\mathscr{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{\varepsilon}_1'=a\,\boldsymbol{\varepsilon}_1-b\,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\mathscr{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{\varepsilon}_2'=b\,\boldsymbol{\varepsilon}_1+a\,\boldsymbol{\varepsilon}_2,$

$\mathscr{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\boldsymbol{\varepsilon}_3'=\boldsymbol{\varepsilon}_1+a\,\boldsymbol{\varepsilon}_3-b\,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\mathscr{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_4)=\boldsymbol{\varepsilon}_4'=\boldsymbol{\varepsilon}_2+b\,\boldsymbol{\varepsilon}_3+a\,\boldsymbol{\varepsilon}_4,$

$\mathscr{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_5)=\boldsymbol{\varepsilon}_5'=\boldsymbol{\varepsilon}_3+a\,\boldsymbol{\varepsilon}_5-b\,\boldsymbol{\varepsilon}_6,\mathscr{D}(\boldsymbol{\varepsilon}_6)=\boldsymbol{\varepsilon}_6'=\boldsymbol{\varepsilon}_4+b\,\boldsymbol{\varepsilon}_5+a\,\boldsymbol{\varepsilon}_6,$

由此得到 $\mathscr{D}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_6$ 下的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{bmatrix}.$$

(5)由题设知

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

而
$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$故(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

于是$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}.$$

即 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(6) 由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$,

而 $(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$,

故有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-5/7 & 20/7 & -20/7\\ -4/7 & -5/7 & -2/7\\ 27/7 & 18/7 & 24/7\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}.$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

(7) 由题(6)即得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-5 & 0 & -5\\ 0 & -1 & -1\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\\ -1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)\boldsymbol{A},$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$.

例 2 设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵(其中 $k\in P$,且 $k\neq 0$);

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

解 由于 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}$,所以

$$\begin{cases}\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3,\\ \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=a_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3.\end{cases} \qquad ①$$

(1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3+a_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1$,(将式①中 1,3 改为 3,1)

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=a_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1,$$

故 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 下的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

(2) 利用式①得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{1}{k}a_{21}(k\boldsymbol{\varepsilon}_2)+a_{31}\boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

$$\mathscr{A}(k\boldsymbol{\varepsilon}_2)=ka_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}(k\boldsymbol{\varepsilon}_2)+ka_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=a_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{23}\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3=a_{13}\boldsymbol{\varepsilon}_1+\frac{1}{k}a_{23}(k\boldsymbol{\varepsilon}_2)+a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,k\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21}/k & a_{22} & a_{23}/k \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

(3) 由式①得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)&=(a_{11}+a_{12})\boldsymbol{\varepsilon}_1+(a_{21}+a_{22})\boldsymbol{\varepsilon}_2+(a_{31}+a_{32})\boldsymbol{\varepsilon}_3\\&=(a_{11}+a_{12})(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)+(a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12})\boldsymbol{\varepsilon}_2\\&\quad+(a_{31}+a_{32})\boldsymbol{\varepsilon}_3,\end{aligned}$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=a_{12}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)+(a_{22}-a_{12})\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{32}\boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=a_{13}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)+(a_{23}-a_{13})\boldsymbol{\varepsilon}_2+a_{33}\boldsymbol{\varepsilon}_3,$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

例 3 在 $P^{2\times2}$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\boldsymbol{X},\quad \mathscr{A}_2(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}_3(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

求 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

解 依 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$ 定义可得

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{E}_{11})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&0\\c&0\end{bmatrix}=a\boldsymbol{E}_{11}+c\boldsymbol{E}_{21},$$

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{E}_{12})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a\\0&c\end{bmatrix}=a\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{22},$$

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{E}_{21})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b&0\\d&0\end{bmatrix}=b\boldsymbol{E}_{11}+d\boldsymbol{E}_{21},$$

$$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{E}_{22})=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&b\\0&d\end{bmatrix}=b\boldsymbol{E}_{12}+d\boldsymbol{E}_{22},$$

故 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{bmatrix}.$$

用类似方法可求得 $\mathscr{A}_2,\mathscr{A}_3$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}a&c&0&0\\b&d&0&0\\0&0&a&c\\0&0&b&d\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{bmatrix}a^2&ac&ab&bc\\ab&ad&b^2&bd\\ac&c^2&ad&cd\\cb&cd&bd&d^2\end{bmatrix}.$$

例 4 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，如果 $\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\boldsymbol{0}$，但 $\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}$，求证 $\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})(k>0)$ 线性无关.

证 用反证法. 设 $\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$ 线性相关，则存在不全为零的数 $l_0,l_1,\cdots,l_{k-1}$ 使得

$$l_0\boldsymbol{\xi}+l_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}.$$

设 l_i 是不等于零系数中下标最小的一个，则有

$$l_i\mathscr{A}^i(\boldsymbol{\xi})+l_{i+1}\mathscr{A}^{i+1}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{0}.$$

等式两端同作变换 $\mathscr{A}^{k-i-1}$，得

$$l_i A^{k-1}(\boldsymbol{\xi})+l_{i+1}\mathscr{A}^{k}(\boldsymbol{\xi})+\cdots+l_{k-1}\mathscr{A}^{2k-i-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0},$$

利用 $\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$，得 $l_i\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}\Longrightarrow l_i=0$，从而与所设 $l_i\neq 0$ 矛盾. 故 $\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$线性无关.

例 5 在 n 维线性空间中，设有线性变换 $\mathscr{A}$ 与向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})\neq\mathbf{0}$ 但 $\mathscr{A}^k(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$，求证 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad ①$$

证 由例 4 知，向量 $\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$线性无关，所以构成线性空间的一组基. 因为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=0\cdot\boldsymbol{\xi}+1\cdot\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})+0\cdot\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi})+\cdots+0\cdot\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}\boldsymbol{\xi})=0\cdot\boldsymbol{\xi}+0\cdot\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})+1\cdot\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi})+\cdots+0\cdot\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi}),$$

$$\vdots$$

$$\mathscr{A}(\mathscr{A}^{k-1}\boldsymbol{\xi})=0\cdot\boldsymbol{\xi}+0\cdot\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})+0\cdot\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\xi})+\cdots+0\cdot\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi}),$$

所以，$\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\xi},\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}),\cdots,\mathscr{A}^{k-1}(\boldsymbol{\xi})$下的矩阵为式①.

例 6 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间. 证明：V 的与全体线性变换可交换的线性变换是数乘变换.

证 当线性空间 V 的基取定时，线性变换与其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 1-1 对应的. 而可以与一切 n 阶方阵交换的方阵一定是数量矩阵 $k\boldsymbol{E}$，故与一切线性变换可交换的线性变换必为数乘变换 $k\mathscr{E}$.

例 7 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 证明：如果 $\mathscr{A}$ 在任意一组基下的矩阵都相同，则 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

证 设 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，要证明 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵. 设 $\boldsymbol{X}$ 是非退化方阵，有

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X},$$

故$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)$也是 V 的一组基，而 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵仍

为 $\boldsymbol{A}$，且有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，从而 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. 由此可知 $\boldsymbol{A}$ 与一切非退化方阵可交换.

若取 $\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{bmatrix}$，则由 $\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1$ 知，当 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，所以 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}\end{bmatrix}$.

再取 $\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}$，由 $\boldsymbol{X}_2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2$ 知，

$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$，故 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵，$\mathscr{A}$ 是数乘变换.

例 8 给定 P^3 的两组基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,1),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=(2,1,0),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_3=(1,1,1);$$

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,2,-1),\quad \boldsymbol{\eta}_2=(2,2,-1),\quad \boldsymbol{\eta}_3=(2,-1,-1).$$

定义线性变换 $\mathscr{A}$：$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\eta}_i\ (i=1,2,3)$.

(1) 写出由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵；

(2) 写出 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵；

(3) 写出 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

解 (1)用单位基 $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\boldsymbol{e}_3=(0,0,1)$ 串联可得

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{A},\quad (\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{B},$$

式中
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

于是，由

$$(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{X}$$

得过渡矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -2 & -3/2 & 3/2 \\ 1 & 3/2 & 3/2 \\ 1 & 1/2 & -5/2 \end{bmatrix}.$$

(2) 由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{X}$,从而知 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{X}$(见题(1)).

(3) 由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)=\mathscr{A}[(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{X}]=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3)\boldsymbol{X}$,所以知 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵仍为 $\boldsymbol{X}$.

例 9 证明:$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix}$ 相似,式中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

证 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性空间 V 的一组基,则

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n})=(\boldsymbol{\varepsilon}_{i_1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{i_n})\begin{bmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{bmatrix},$$

从而知两矩阵是线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵,故它们相似.

例 10 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆,证明:$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似.

证 由题设知，存在 A^{-1}，于是

$$A^{-1}(AB)A=(A^{-1}A)(BA)=BA.$$

所以，由定义知 AB 与 BA 相似.

例 11 如果 A 与 B 相似，C 与 D 相似，证明：$\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}$与 $\begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$相似.

证 设 $B=X^{-1}AX, D=Y^{-1}CY$，则

$$\begin{bmatrix} X & O \\ O & Y \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & O \\ O & Y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} X^{-1}AX & O \\ O & Y^{-1}CY \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix},$$

所以，$\begin{bmatrix} A & O \\ O & C \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} B & O \\ O & D \end{bmatrix}$相似.

例 12 设 $P[t]_3$ 有基 $f_1(t)=-1+2t^2, f_2(t)=t+t^2, f_3(t)=3-t$，线性变换 $\mathscr{A}$ 满足：$\mathscr{A}(f_1(t))=-5+3t^2, \mathscr{A}(f_2(t))=-t+6t^2, \mathscr{A}(f_3(t))=-5-t+9t^2$，求 $\mathscr{A}$ 在基 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$ 下的矩阵.

解 取 $P[t]_3$ 的基 $1, t, t^2$，则有

$$(f_1, f_2, f_3)=(1,t,t^2)B, \quad \mathscr{A}(f_1, f_2, f_3)=(1,t,t^2)A,$$

式中 $$B=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

于是 $\mathscr{A}(f_1, f_2, f_3)=(f_1\ f_2\ f_3)B^{-1}A$，故 $\mathscr{A}$ 在基 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$下的矩阵为

$$X=B^{-1}A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

例 13 设 Q 为有理数域，V 为 Q 上的线性空间，$\mathscr{A}$ 是 V 的线性变换. $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 是 V 上的向量，$\boldsymbol{\alpha}\neq \mathbf{0}$ 且 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\gamma}, \mathscr{A}(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$. 证明：$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关.

证 先用反证法证明 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关. 设 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$，则

$$\boldsymbol{\gamma}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=k\boldsymbol{\beta}=k^2\boldsymbol{\alpha},$$

于是 $$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\gamma})=k^2\boldsymbol{\beta}=k^3\boldsymbol{\alpha}\Longrightarrow(k^3-k+1)\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},$$

从而 $k^3-k+1=0$. 但方程 $x^3-x+1=0$ 无有理根，与 $\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$ 矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

再证 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关. 设有 $k,l\in\mathbf{Q}$，使 $\boldsymbol{\gamma}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}$，因而

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathscr{A}(\boldsymbol{\gamma})=k\boldsymbol{\beta}+l\boldsymbol{\gamma}=kl\boldsymbol{\alpha}+(k+l^2)\boldsymbol{\beta}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关知 $kl=1,k+l^2=1\Longrightarrow l^3-l+1=0$，与方程 $x^3-x+1=0$ 无有理根矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 线性无关.

第三节 特征值与特征向量 对角矩阵

主 要 内 容

1. 定义 1 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上线性空间 V 的一个线性变换，若对于数域 P 中一数 λ_0，存在一个非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$，则 λ_0 称为 $\mathscr{A}$ 的一个**特征值**，$\boldsymbol{\xi}$ 称为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个**特征向量**.

2. 定义 2 设 $\mathbf{A}$ 是数域 P 上一个 n 阶矩阵，λ 是一个数字，矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\mathbf{A}$ 的行列式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 $\mathbf{A}$ 的**特征多项式**，是数域 P 上的一个 n 次多项式.

矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式的根也称 $\mathbf{A}$ 的特征值，而齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\mathbf{A})(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n})'=\mathbf{0}$ 的解也称为 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量.

对于线性变换 $\mathscr{A}$ 的任一特征值 λ_0，全部适合条件 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}$

的向量$\boldsymbol{\alpha}$所成的集合，是V的一个子空间，称为$\mathscr{A}$的一个特征子空间，记为V_{λ_0}. V_{λ_0}的维数是属于λ_0的线性无关的特征向量的最大个数，$V_{\lambda_0}=\{\boldsymbol{\alpha}\mid\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda_0\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\in V\}$.

$\boldsymbol{A}$的全体特征值之和为$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，称为$\boldsymbol{A}$的**迹**. $\boldsymbol{A}$的全体特征值之积为$|\boldsymbol{A}|$.

3. 定理1 相似的矩阵有相同的特征多项式.

哈密顿-凯莱(Hamilton-Caylay)定理 设$\boldsymbol{A}$是数域P上一个$n\times n$矩阵，$f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$是$\boldsymbol{A}$的特征多项式，则

$$f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\boldsymbol{A}^{n+1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}.$$

推论 设$\mathscr{A}$是有限维空间V的线性变换，$f(\lambda)$是$\mathscr{A}$的特征多项式，则$f(\mathscr{A})=\mathscr{O}$.

4. 定理2 设$\mathscr{A}$是n维线性空间V的一个线性变换，$\mathscr{A}$的矩阵在某组基下为对角矩阵的充分必要条件是，$\mathscr{A}$有n个线性无关的特征向量.

定理3 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

推论1 若在n维线性空间V中，线性变换$\mathscr{A}$的特征多项式在数域P中有n个不同的根，即$\mathscr{A}$有n个不同的特征值，则$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵是对角形的.

推论2 在复数域上的线性空间中，如果线性变换$\mathscr{A}$的特征多项式没有重根，则$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵是对角形的.

5. 定理4 若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$是线性变换$\mathscr{A}$的不同的特征值，而$\boldsymbol{\alpha}_{i1},\boldsymbol{\alpha}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{ir_i}$是属于特征值$\lambda_i$的线性无关的特征向量$(i=1,2,\cdots,k)$，则向量组$\boldsymbol{\alpha}_{11},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{1r_1},\boldsymbol{\alpha}_{21},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{2r_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{kr_k}$也线性无关.

当$\mathscr{A}$在某组基下的矩阵$\boldsymbol{A}$是对角形

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

时，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n).$$

即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线的全部元素是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的全部根.

疑 难 解 析

1. 特征值与特征向量有何关系？怎样确定一个线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量？

答 由 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\lambda_0\boldsymbol{\xi} \Longrightarrow \mathscr{A}(k\boldsymbol{\xi})=\lambda_0(k\boldsymbol{\xi})$ 可知，特征向量不是被特征值唯一决定的. 相反，特征值却是被特征向量唯一决定的，即一个特征向量只能属于一个特征值. 我们应该知道：

①对于有限维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$，因为 $\mathscr{A}$ 在不同基下的矩阵是相似的，因而求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量与基的选择无关.

②线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

③若 λ_0 是线性变换 $\mathscr{A}$(或 $\boldsymbol{A}$)的特征值，则 $\forall k\in \mathbf{N}$，$\lambda_0{}^k$ 是 $\boldsymbol{A}^k$ 的特征值.

④线性变换 $\mathscr{A}$(或 $\boldsymbol{A}$)不可逆的充要条件是 $\mathscr{A}$(或 $\boldsymbol{A}$)有零特征值. 当 $\mathscr{A}$(或 $\boldsymbol{A}$)可逆时，若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的所有互异特征值，则 $\mathscr{A}^{-1}$(或 $\boldsymbol{A}^{-1}$)的所有互异特征值是 $\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\cdots,\lambda_n^{-1}$.

确定一个线性变换的特征值与特征向量有以下步骤：

(1) 在 V 中取出一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，写出 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式 $|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 在数域 P 中全部的根(即全部特征值)；

(3) 将求得的特征值逐个代入方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(x_{01},x_{02},\cdots,x_{0n})'=\boldsymbol{0}$. 对每一特征值，求出一组基础解系，即属于此特征值的若干个线性无关的特征向量在取定基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的坐标，也就求出了属于每个特征值的全部线性无关的特征向量.

2. 矩阵 A 的特征值与特征向量有哪些性质？

答 有如下性质：

(1) 若 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的 r_i 重特征值，而 λ_i 有 s_i 个线性无关的特征向量，则 $1\leqslant s_i\leqslant r_i$.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量，则当 $k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$ 时，它也是特征值 λ_0 的特征向量.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}\text{(称为迹)},$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|.$$

(4) 若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值，则其分别对应的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_s$ 线性无关. 若 λ_i 对应的特征值是 $\boldsymbol{\xi}_{i1},\boldsymbol{\xi}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{ir_i}$，则向量组 $\boldsymbol{\xi}_{11},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{1r_1},\boldsymbol{\xi}_{21},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{2r_2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{s1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{sr_s}$ 线性无关.

3. 线性变换与矩阵、特征多项式之间存在什么关系?

答 特征值是被线性变换所决定的. 在有限维线性空间 V 中，选定一组基后，特征值是线性变换在这组基下矩阵的特征多项式的根. 对于不同的基，矩阵一般是不同的，但它们却是相似的. 而相似的矩阵有相同的特征多项式，也就有相同的特征根. 也说明矩阵的特征多项式与基的选择无关，完全由线性变换决定，故可称为线性变换的特征多项式.

4. 线性变换的特征向量之间有什么关系?

答 首先属于特征值 λ_0 的特征向量不是唯一的，若 $\boldsymbol{\xi}$ 是 λ_0 的特征向量，则 $k\boldsymbol{\xi}$ $(k\neq 0)$ 也是 λ_0 的特征向量. 若 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 都是 λ_0 的特征向量，则 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2$ $(\neq\boldsymbol{0})$ 也是 λ_0 的特征向量.

但是 n 阶方阵不一定有 n 个线性无关的特征向量. 当 n 阶方阵有互异的 n 个特征值时，一定有 n 个线性无关的特征向量，这时线性变换 $\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为对角形. 当 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 $\mathscr{A}$ 的不同的特征值，而 $\boldsymbol{\xi}_{i1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{ir_i}$ 是 λ_i 的线性无关的特征向量时，向量组 $\boldsymbol{\xi}_{11},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{1r_1},\boldsymbol{\xi}_{21},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{2r_2},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{k1},\cdots,\boldsymbol{\xi}_{kr_k}$ 也线性无关. 若它们的个数等于空间的维数，则线性变换 $\mathscr{A}$ 在一组合适的基下的矩阵是对角矩阵.

方法、技巧与典型例题分析

要认真辨析特征值与特征向量的概念，能够求线性变换在一组基下的特征值与特征向量.

例 1 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 分别是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的互异特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量，证明：当 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中至少有两个不为零时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 必不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

证 用反证法. 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量，则

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n)=\lambda(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n),$$

即
$$k_1(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\lambda-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n(\lambda-\lambda_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}.$$

因为属于不同特征值的特征向量线性无关，故

$$k_1(\lambda_1-\lambda_2)=k_2(\lambda-\lambda_2)=\cdots=k_n(\lambda-\lambda_n)=0,$$

不妨设 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 中 $k_i\neq 0,k_j\neq 0$，则

$$k_i(\lambda-\lambda_i)=k_j(\lambda-\lambda_j)=0\Longrightarrow\lambda_i=\lambda_j,$$

这与题设矛盾. 故 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 必不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

例 2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的线性无关的特征向量，证明：当 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为零时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量.

证 因为 $\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_0\boldsymbol{\alpha}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，

故
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n)&=k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n\\&=\lambda(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n).\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关，所以对不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n\neq\boldsymbol{0}$，从而 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量.

例 3 求复数域上线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量. 已知 $\mathscr{A}$ 在一组基下的矩阵为：

$$(1)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&4\\5&2\end{bmatrix};\quad(2)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&a\\-a&0\end{bmatrix};\quad(3)\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix};$$

(4) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$； (5) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 3\\ -1 & -3 & 0\end{bmatrix}$；

(6) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ -4 & -1 & 0\\ 4 & -8 & -2\end{bmatrix}$； (7) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

解 (1) $\mathscr{A}$的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -4\\ -5 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-7)(\lambda+2)\Longrightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=7.$$

当 $\lambda=-2$ 时，解方程组 $\begin{bmatrix}-5 & -4\\ -5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，求得基础解系为 $(4,-5)'$，故 $\mathscr{A}$ 的属于 $\lambda=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=4\boldsymbol{\varepsilon}_1-5\boldsymbol{\varepsilon}_2$.

当 $\lambda=7$ 时，解方程组 $\begin{bmatrix}4 & -4\\ -5 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，求得基础解系为 $(1,1)'$，故 $\mathscr{A}$ 的属于 $\lambda=7$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$.

(2) $\mathscr{A}$的特征多项式为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -a\\ a & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-a\mathrm{i})(\lambda+a\mathrm{i})\Longrightarrow\lambda_1=a\mathrm{i},\lambda_2=-a\mathrm{i}.$$

当 $\lambda_1=a\mathrm{i}$ 时，若 $a=0$，则 $\lambda_1=\lambda_2=0$，此时 V 中任何非零向量都是(零变换)$\mathscr{A}$的特征向量. 若 $a\neq0$，则解方程组

$$\begin{bmatrix}a\mathrm{i} & -a\\ a & a\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

得一基础解系 $(1,\mathrm{i})'$. 故 $\mathscr{A}$ 的属于 $\lambda_1=a\mathrm{i}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_2$.

当 $\lambda_2=-a\mathrm{i}$ 时，解方程组

$$\begin{bmatrix}-a\mathrm{i} & -a\\ a & -a\mathrm{i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

得一基础解系 $(1,-\mathrm{i})'$. 故 $\mathscr{A}$ 的属于 $\lambda_2=-a\mathrm{i}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\mathrm{i}\boldsymbol{\varepsilon}_2$.

(3) $\mathscr{A}$的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1.$$

当 $\lambda_{1,2}=1$ 时，解方程组 $(1\cdot E-A)X=0$，得基础解系 $(1,0,1)',(0,1,0)$，故 $\mathscr{A}$的属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为

$$\xi_1=\varepsilon_1+\varepsilon_3,\xi_2=\varepsilon_2.$$

当 $\lambda_3=-1$ 时，解方程组 $((-1)\cdot E-A)X=0$，得基础解系 $(1,0,-1)'$，故 $\mathscr{A}$的属于 $\lambda_3=-1$ 的特征向量为 $\xi_3=\varepsilon_1-\varepsilon_3$.

(4) $\mathscr{A}$的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-2)\Rightarrow\lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{3},\lambda_3=1-\sqrt{3}.$$

当 $\lambda_1=2$ 时，解方程组 $(2E-A)X=0$，得基础解系 $(-2,1,0)'$，故 $\mathscr{A}$的属于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\xi_1=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2$.

当 $\lambda_2=1+\sqrt{3}$时，解方程组 $((1+\sqrt{3})E-A)X=0$，得基础解系 $(3,-1,2-\sqrt{3})'$，故 $\mathscr{A}$的属于 $\lambda_2=1+\sqrt{3}$的特征向量为 $\xi_2=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2-\sqrt{3})\varepsilon_3$.

当 $\lambda_3=1-\sqrt{3}$时，解方程组 $((1-\sqrt{3})E-A)X=0$，得基础解系 $(3,-1,2+\sqrt{3})'$. 故 $\mathscr{A}$的属于 $\lambda_3=1-\sqrt{3}$的特征向量为 $\xi_3=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2+\sqrt{3})\varepsilon_3$.

(5) $\mathscr{A}$的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda^2+14)\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=\sqrt{14}\mathrm{i},\lambda_3=-\sqrt{14}\mathrm{i}.$$

将 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 分别代入方程组 $(\lambda E-A)X=0$，求得：

$\mathscr{A}$的属于 $\lambda_1=0$ 的一切特征向量为 $\xi_1=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3$；$\mathscr{A}$的属于 $\lambda_2=\sqrt{14}\mathrm{i}$ 的特征向量为 $\xi_2=(3-2\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_1+13\varepsilon_2+(2+3\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_3$；$\mathscr{A}$的属于 $\lambda_3=-\sqrt{14}\mathrm{i}$ 的特征向量为 $\xi_3=(3+2\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_1+13\varepsilon_2+(2-3\sqrt{14}\mathrm{i})\varepsilon_3$.

(6) $\mathscr{A}$的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+2) \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-2.$$

将 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 分别代入方程组$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,求得：

$\mathscr{A}$的属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=3\boldsymbol{\varepsilon}_1-6\boldsymbol{\varepsilon}_2+20\boldsymbol{\varepsilon}_3$；$\mathscr{A}$的属于 $\lambda_3=-2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_3$.

(7) $\mathscr{A}$的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(\lambda-2)^3(\lambda+2) \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2, \lambda_4=-2.$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 时,解方程组$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系$(1,1,0,0)'$,$(1,0,1,0)'$,$(1,0,0,1)'$,故 $\mathscr{A}$的属于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_4$.

当 $\lambda_4=-2$ 时,解方程组$(-2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$,得基础解系$(-1,1,1,1)'$,故 $\mathscr{A}$的属于 $\lambda_4=-2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_4=-\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$.

为了便于将$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$分解成 λ 的因式,常在展开前采用下述变形:①将$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$中不含 λ 的元素消成零,使该元素所在行或列出现 λ 的一次因式,直到行列式为 λ 的某次多项式才展开计算;②若$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$的行(列)和相等,可将各行(列)加到第 1 行(列),即可提出 λ 的一次因式.

解方程组$(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 时,因为基础解系不是唯一的,因而特征向量形式也不一定相同.

例 4 在例 3 各题中哪些变换的矩阵可以在适当的基下变成对角形? 在可以化成对角形的情况下,写出相应的基变换过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$,并验算 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

解 因为一个 n 阶方阵能化为对角形的充要条件是线性变换要有 n 个线性无关的特征向量,所以例 3 中除题(6)外,其余的方阵均可化为对角形.

(1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$,取其特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$,得

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & -5\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & -5\end{bmatrix}$是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 到基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 的过渡矩阵. 又

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1)=7\boldsymbol{\xi}_1,\quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_2)=-2\boldsymbol{\xi}_2,$$

即

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix},$$

由 $\mathscr{A}$ 在不同基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 及 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 下的矩阵相似,故有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & -5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}.$$

(2) 由 $\mathscr{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 得

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2)\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}$是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 到基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 的过渡矩阵,故有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ \mathrm{i} & -\mathrm{i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\mathrm{i} & \\ & -a\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

(3) 取 $\mathscr{A}$ 的三个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,得

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{P},$$

则 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 的过渡矩阵.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & -1\end{bmatrix}.$$

(4) 取 $\mathscr{A}$ 的三个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$,得

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}-2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{P},$$

$\boldsymbol{P}$ 是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 的过渡矩阵.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}-1 & -3 & 0\\ 1/2+\sqrt{3}/3 & 1+2\sqrt{3}/3 & -\sqrt{3}/6\\ 1/2-\sqrt{3}/3 & 1-2\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6 & -3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}-2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & & \\ & 1+\sqrt{3} & \\ & & 1-\sqrt{3}\end{bmatrix}.$$

(5) 取 $\mathscr{A}$ 的三个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$，得

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix}3 & 3-2\sqrt{14}\mathrm{i} & 3+2\sqrt{14}\mathrm{i}\\ -1 & 13 & 13\\ 2 & 2+3\sqrt{14}\mathrm{i} & 2-3\sqrt{14}\mathrm{i}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{P},$$

$\boldsymbol{P}$ 是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 的过渡矩阵.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & \sqrt{14}\mathrm{i} & \\ & & -\sqrt{14}\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

(6) 没有足够数量的线性无关的特征向量，不能化为对角形.

(7) 取 $\mathscr{A}$ 的四个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$，得

$$(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{P},$$

$\boldsymbol{P}$ 是由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3,\boldsymbol{\xi}_4$ 的过渡矩阵.

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&&&\\&2&&\\&&2&\\&&&-2\end{bmatrix}.$$

本例各题中 $\mathscr{A}$ 的特征向量彼此是线性无关的.

例 5 在 $P[x]_n$ 中($n>1$),求微分变换 $\mathscr{D}$ 的特征多项式,并证明:$\mathscr{D}$ 在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

证 在 $P[x]_n$ 中取一组基 $1,x,\frac{x^2}{2!},\cdots,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$. 微分计算在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}.$$

则
$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&\cdots&0\\0&\lambda&-1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1\\0&0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^n.$$

故 $\mathscr{D}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$.

对应于特征值 0 的齐次线性方程组 $(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{O}$ 的系数矩阵的秩为 $n-1$,其基础解系只含一个特征向量 $(1,0,\cdots,0)'$. 因此,微分运算 $\mathscr{D}$ 在任何基下的矩阵都不可能成为对角形.

例 6 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&4&2\\0&-3&4\\0&4&3\end{bmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^k$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$|\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -4 & -2\\ 0 & \lambda+3 & -4\\ 0 & -4 & \lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-25),$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda_3=-5$.

可以求得 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=5,\lambda_3=-5$ 的特征向量分别为 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,0,0)',\boldsymbol{\xi}_2=(2,1,2)',\boldsymbol{\xi}_3=(1,-2,1)'$. 故由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 的过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{bmatrix}^k=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k\end{bmatrix}.$$

故 $$\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1/5 & 2/5\\ 0 & -2/5 & 1/5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2[1+(-1)^{k+1}]5^{k-1} & [4+(-1)^k]5^{k-1}-1\\ 0 & [1+4(-1)^k]5^{k-1} & 2[1+(-1)^{k+1}]5^{k-1}\\ 0 & 2[1+(-1)^{k+1}]5^{k-1} & [4+(-1)^k]5^{k-1}\end{bmatrix}.$$

当 $k=2m$ 时，$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}1 & 0 & 5^k-1\\ 0 & 5^k & 0\\ 0 & 0 & 5^k\end{bmatrix}$；

当 $k=2m-1$ 时，$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}1 & 4\times5^{k-1} & 3\times5^{k-1}-1\\ 0 & -3\times5^{k-1} & 4\times5^{k-1}\\ 0 & 4\times5^{k-1} & 3\times5^{k-1}\end{bmatrix}$.

例 7 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是四维空间 V 的一组基，线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}5 & -2 & -4 & 3\\ 3 & -1 & -3 & 2\\ -3 & 1/2 & 9/2 & -5/2\\ -10 & 3 & 11 & -7\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$，$\boldsymbol{\eta}_2=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$，$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3$，$\boldsymbol{\eta}_4=\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的矩阵；

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量；

(3) 求一可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角形.

解 (1)

$$(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{P},$$

所以在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下 $\mathscr{A}$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2 & -4 & 3\\ 3 & -1 & -3 & 2\\ -3 & 1/2 & 9/2 & -5/2\\ -10 & 3 & 11 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 6 & -5\\ 0 & 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & 7/2 & -3/2\\ 0 & 0 & 5 & -2\end{bmatrix}.$$

(2) $\mathscr{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda E-B|=\lambda^2(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1,\lambda_4=\frac{1}{2}.$$

解$(-B)X=O$,得特征向量 $\xi_1=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4$,$\xi_2=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3$;解$(E-B)X=O$,得特征向量 $\xi_3=3\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-2\varepsilon_4$;解$\left(\frac{1}{2}E-B\right)X=O$,得特征向量 $\xi_4=4\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3-6\varepsilon_4$.

注意,因为 $A\sim B$,所以$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$.

(3)用题(2)中特征向量 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 作一组基,有

$$T=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&2\\1&1&1&-1\\1&0&-2&6\end{bmatrix}\Rightarrow T^{-1}AT=\begin{bmatrix}0&&&\\&0&&\\&&1&\\&&&1/2\end{bmatrix}.$$

例 8 (1)设 λ_1,λ_2 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的两个不同特征值,$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量,证明:$\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 $\mathscr{A}$ 的特征向量;

(2) 证明:如果线性空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量,则 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

证 (1)用反证法.设 $\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 是 $\mathscr{A}$ 的特征向量,则因 $\mathscr{A}(\varepsilon_1)=\lambda_1\varepsilon_1$,$\mathscr{A}(\varepsilon_2)=\lambda_2\varepsilon_2$,$\lambda_1\neq\lambda_2$,可得 $\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2$.

又 $\mathscr{A}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$,从而

$$\lambda_1\varepsilon_1+\lambda_2\varepsilon_2=\lambda(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\Rightarrow(\lambda_1-\lambda)\varepsilon_1+(\lambda_2-\lambda)\varepsilon_2=\mathbf{0}.$$

由 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 线性无关知,$\lambda_1-\lambda=0$,$\lambda_2-\lambda=0$,从而 $\lambda_1=\lambda_2$,与题设矛盾,故命题得证.

(2) 取 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,并设 $\mathscr{A}(\varepsilon_i)=\lambda_i\varepsilon_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$.由题(1)知 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=k$(否则,若 $i\neq j$ 时,$\lambda_i\neq\lambda_j$,则 $\varepsilon_i+\varepsilon_j$不是特征向量,与题设矛盾).故对任何向量 ξ,都有 $\mathscr{A}(\xi)=\lambda\xi$,所以 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

例 9 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 上的可逆线性变换,证明:

(1) $\mathscr{A}$ 的特征值一定不为零;

(2) 若 λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值,则$\frac{1}{\lambda}$是 $\mathscr{A}^{-1}$ 的特征值.

证 (1)用反证法. 设$\lambda=0$是$\mathscr{A}$的特征值,而$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$是$\mathscr{A}$的属于$\lambda=0$的一个特征向量,即$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$. 又由于$\mathscr{A}$为可逆线性变换,存在$\mathscr{A}^{-1}$,使

$$\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0},$$

与$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$矛盾. 故$\mathscr{A}$的特征值一定不为零.

也可以这样证明:因为$\mathscr{A}$是可逆线性变换,$\mathscr{A}$对应的矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式$|\boldsymbol{A}|\neq0$,而$\mathscr{A}$的一切特征值之积$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$,所以$\mathscr{A}$的特征值一定不为零.

(2) 设$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$是$\mathscr{A}$的属于特征值$\lambda$的一个特征向量,$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 由题(1)知$\lambda\neq0$,故

$$\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}^{-1}(\lambda\boldsymbol{\alpha})\Longrightarrow\boldsymbol{\alpha}=\lambda(\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha})\text{或}\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda^{-1}\boldsymbol{\alpha},$$

知λ^{-1}是$\mathscr{A}^{-1}$的特征值.(注意$\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$.)

例 10 设$\mathscr{A}$是线性空间V上的线性变换,证明:$\mathscr{A}$的行列式为零的充分必要条件是$\mathscr{A}$以零作为一个特征值.

证 因为线性变换$\mathscr{A}$的矩阵为$\boldsymbol{A}$时,$\mathscr{A}$的一切特征值之积为$|\boldsymbol{A}|$,所以

$$|\boldsymbol{A}|=0=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\Longleftrightarrow\text{至少有一}\ \lambda_i=0,$$

即$\mathscr{A}$以零作为一个特征值.

例 11 设$\boldsymbol{A}$是一个n阶下三角矩阵,证明:

(1)若$a_{ii}\neq a_{jj}$,当$i\neq j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,则$\boldsymbol{A}$相似于一对角矩阵;

(2) 若$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$,而至少有一$a_{i_0j_0}\neq0$ $(i_0>j_0)$,则$\boldsymbol{A}$不与对角矩阵相似.

证 (1) 若$a_{ii}\neq a_{jj}$ $(i\neq j)$,则因为$\boldsymbol{A}$是下三角矩阵,所以$\boldsymbol{A}$有n个不同的特征值$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$,故$\boldsymbol{A}$可以对角化.

(2) 若$a=a_{11}=\cdots=a_{nn}$,则$\boldsymbol{A}$的特征多项式等于$(\lambda-a)^n$,所以a是$\boldsymbol{A}$的唯一特征值. 若$\boldsymbol{A}$可对角化,则存在可逆阵$\boldsymbol{P}$,使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=a\boldsymbol{E}$,从而$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}(a\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}^{-1}=a\boldsymbol{E}$,因此$\boldsymbol{A}$是对角矩阵. 这与$\boldsymbol{A}$至少有一个$a_{i_0j_0}\neq0$ $(i_0>j_0)$矛盾,故$\boldsymbol{A}$不可能与对角矩阵相似.

例 12 证明:对任一 $n\times n$ 复系数矩阵 $\boldsymbol{A}$,存在可逆矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{AT}$ 是上三角矩阵.

证 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换,它在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 取其任一特征值 λ_1,设对应的特征向量为 $\boldsymbol{\beta}_1$,于是可补充 $n-1$ 个向量 $\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$,使 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 成为 V 的一组基,得 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix},$$

且 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

故存在可逆方阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

对级数 n 使用数学归纳法,证 $\boldsymbol{B}$ 是对角矩阵.

$n=1$ 时,结论显然成立.

设 $n-1$ 时,结论也成立.

当 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶复方阵时,有 $\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{AP}_1=\boldsymbol{B}$.

由于 $\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{bmatrix}$ 是 $n-1$ 阶复方阵,则依归纳假设,

存在 $n-1$ 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}_2$ 使

$$\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}\lambda_2 & & & *\\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}\Rightarrow\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{bmatrix},$$

使 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{B}_2 & \\ 0 & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda_1 & * \\ 0 & P_2^{-1}B_2P_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

从而命题得证(其中 * 处元素不全为零).

例 13 证明:幂零矩阵 A 可对角化的充分必要条件是 $A=O$.

证 必要性 设 $A^m=O$,若 A 可对角化,则存在可逆阵 P,使 $P^{-1}AP=B$ 为对角阵,故

$$B^m=(P^{-1}AP)^m=P^{-1}A^mP=P^{-1}OP=O.$$

从而 $B=O\Longrightarrow A=O$.

充分性 $A=O$ 是可以对角化的.

例 14 设 A 为 n 阶方阵,满足 $A^2-3A+2E=O$,求一可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP$ 为对角形.

解 由题设可得

$$(A-E)(A-2E)=(A-2E)(A-E)=O,$$

由于 $A-2E$ 的每一个列向量是 $(A-E)X=O$ 的解,故秩 $(A-E)$ + 秩 $(A-2E)\leqslant n$.

又 $$A-E-(A-2E)=E$$
$$\Longrightarrow 秩(A-E)+秩(A-2E)\geqslant 秩(E)=n,$$

所以 $$秩(A-E)+秩(A-2E)=n.$$

不妨设秩 $(A-E)=k$,秩 $(A-2E)=s$,则 $k+s=n$.

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 分别是 $A-E$ 和 $A-2E$ 的列极大无关组,由于 $(A-E)(A-2E)=O$,知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是属于特征值 2 的线性无关的特征向量;$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是属于特征值 1 的线性无关的特征向量,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关. 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$,得

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 2\end{bmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right\}k\text{ 个}\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}2\\ \ddots\\ 2\end{matrix}}\right\}s\text{ 个}\end{matrix}.$$

例 15 设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\quad A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,\quad A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3.$$

(1) 求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

(2) 求矩阵 A 的特征值；

(3) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解 (1)由题设知

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix},$$

故

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

(2)因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，故矩阵 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$可逆，所以 $C^{-1}AC=B$，即 A 与 B 相似. 故 A 与 B 有相同的特征值. 由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 2\\ -1 & -1 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0,$$

解得 B(即 A)的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

(3)当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，由 $(E-B)X=O$ 解得基础解系 $\xi_1=(-1,1,0)^1,\xi_2=(-2,0,1)'$.

当 $\lambda_3=4$ 时，由 $(4E-B)X=O$ 解得基础解系 $\xi_3=(0,1,1)'$.

令 $Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$,

由 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ$,记矩阵

$$P=CQ=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3).$$

P 即为所求可逆矩阵.

例 16 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -1 & 4 & -3\\ 1 & a & 5\end{bmatrix}$ 的特征方程有一个二重根,求 a 的值,并讨论 A 是否可相似对角化.

解 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 3\\ 1 & \lambda-4 & 3\\ -1 & -a & \lambda-5\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根,则由 $2^2-16+18-3a=0$,解得 $a=-2$. 此时,A 的特征值为 2,2,6. 矩阵

$$2E-A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 1 & -2 & 3\\ -1 & 2 & -3\end{bmatrix}$$

的秩为 1,故 $\lambda=2$ 对应的特征向量有两个,故 A 可对角化.

若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根,则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 应为完全平方,此时 $18+3a=16$,可解得 $a=-2/3$. 此时,A 的特征值为 2,4,4. 矩阵

$$4E-A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 3\\ 1 & 0 & 3\\ -1 & 2/3 & -1\end{bmatrix}$$

的秩为 2,故二重根 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有一个,从而 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

例 17 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(2)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

解 (1) 当 $b=0$ 时,显然有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$,任意非零列向量均为特征向量.

当 $b\neq 0$ 时,

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1},$$

则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$, $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

当 $\lambda_1=1+(n-1)b$ 时,设 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_1$,则有

$$\begin{bmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1=[1+(n-1)b]\boldsymbol{\xi}_1.$$

解得 $\boldsymbol{\xi}_1=(1,1,\cdots,1)'$. 故全部特征向量为

$$k\boldsymbol{\xi}_1=k(1,1,\cdots,1)',\quad k \text{ 为任意非零常数}.$$

当 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$ 时,由

$$(1-b)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-b & -b & \cdots & -b\\ -b & -b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & -b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix},$$

解得$[(1-b)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}]\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_2=(1,-1,0,\cdots,0)',$$
$$\boldsymbol{\xi}_3=(1,0,-1,\cdots,0)',$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{\xi}_n=(1,0,0,\cdots,-1)'.$$

故全部特征向量为

$k_2\boldsymbol{\xi}_2+k_3\boldsymbol{\xi}_3+\cdots+k_n\boldsymbol{\xi}_n$， $k_1,k_3,\cdots,k_n$ 为不全为零常数.

(2) 当 $b=0$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，对任意可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，均有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{E}$.

当 $b\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，令

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\cdots,\boldsymbol{\xi}_n),$$

则 $$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(1+(n-1)b,1-b,\cdots,1-b).$$

例 18 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)'$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,1)'$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,2,-3)'$都是属于特征值 6 的特征向量.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征向量和对应的特征向量；

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

解 (1) 由于 6 是 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征根，故 $\boldsymbol{A}$ 的属于 6 的线性无关的特征向量有两个. 由题设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 知，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是一个极大无关组，即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 6 的线性无关的特征向量.

由秩$(\boldsymbol{A})=2$ 知 $|\boldsymbol{A}|=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 的另一特征值 $\lambda_3=0$. 设 λ_3 对应特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3)'$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1'\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_2'\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{cases}x_1+x_2 \qquad =0,\\ 2x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

解得方程组基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,1,1)'$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_3=0$ 的特征向量为

$$c\boldsymbol{\alpha}=c(-1,1,1)', \quad c \text{为非零任意常数}.$$

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})$，则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&0\end{bmatrix}, \quad \text{故} \quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}.$$

又 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1/3&-1/3&2/3\\-1/3&1/3&1/3\end{bmatrix}$，从而 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{bmatrix}$.

第四节 线性空间的值域与核不变子空间

主要内容

1. 定义 1 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的一个线性变换，$\mathscr{A}$ 的全体像组成的集合称为 $\mathscr{A}$ 的**值域**，用 $\mathscr{A}(V)$ 表示. 所有被 $\mathscr{A}$ 变成零向量的向量组成的集合称为 $\mathscr{A}$ 的**核**，用 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 表示.

$\mathscr{A}(V)$ 与 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 都是 V 的子空间. $\mathscr{A}(V)$ 的维数称为 $\mathscr{A}$ 的**秩**，$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 的维数称为 $\mathscr{A}$ 的**零度**.

2. 定理 1 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维空间 V 的线性变换，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，在这组基下 $\mathscr{A}$ 的矩阵是 $\mathbf{A}$，则

(1) $\mathscr{A}$ 的值域 $\mathscr{A}(V)$ 是由基像组生成的子空间，即

$$\mathscr{A}(V)=L(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)).$$

(2) 秩$(\mathscr{A})$=秩$(\mathbf{A})$.

3. 定理 2 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的线性变换. 则 $\mathscr{A}(V)$ 的一组基的原像及 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 的一组基结合起来就是 V 的一组基，且有

$$\mathscr{A}\text{的秩}+\mathscr{A}\text{的零度}=n.$$

推论 对于有限维线性变换，它是单射的充分必要条件是它是满射.

4. 定义 2 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间. 如果 W 中的向量在 $\mathscr{A}$ 下的像仍在 W 中，即对于 W 中任一向量 $\boldsymbol{\xi}$，有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})\in W$，则称 W 是 $\mathscr{A}$ 的**不变子空间**，简称 $\mathscr{A}$-子空间.

$\mathscr{A}$-子空间的和与交还是 $\mathscr{A}$-子空间.

5. 定理 3 设线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征多项式为 $f(\lambda)$，它可分解成一次因式的乘积

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

则 V 可分解成不变子空间的直和

$$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s,$$

其中

$$V_i=\{\boldsymbol{\xi}\mid(\mathscr{A}-\lambda_i\mathscr{E})^{r_i}\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0},\boldsymbol{\xi}\in V\}.$$

疑 难 解 析

研究不变子空间有什么意义？

答 设 $\mathscr{A}$ 是线性空间 V 的线性变换，W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，由于 W 中向量在 $\mathscr{A}$ 下的像仍在 W 中，因而可能不必在整个 V 中来考虑 $\mathscr{A}$，而只需在 W 中考虑 $\mathscr{A}$. 从而简化线性变换 $\mathscr{A}$.

因此，如果 V 能分解为若干个关于 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 $W_1,W_2,\cdots,W_k$ 的直和，那么对 V 的线性变换 $\mathscr{A}$ 的研究就可以归结为对各个子空间 $W_1,W_2,\cdots,W_k$ 的直和的研究.

设 V 可分解为若干个 $\mathscr{A}$-子空间的直和，即 $V=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_k$. 在每一个 $\mathscr{A}$-子空间 W_i 中取基 $\boldsymbol{\varepsilon}_{i1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{in_i}$ $(i=1,2,\cdots,k)$，它们合并后得到 V 的一组基，则在这组基下，$\mathscr{A}$ 的矩阵具有形式

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_k\end{bmatrix},$$

其中 $\mathbf{A}_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ 是 $\mathscr{A}|W_i$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_{i1},\boldsymbol{\varepsilon}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{in_i}$ 下的矩阵.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\-1&2&1&3\\1&2&5&5\\2&-2&1&-2\end{bmatrix}.$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4$，$\boldsymbol{\eta}_2=3\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_4$，$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_3+\boldsymbol{\varepsilon}_4$，$\boldsymbol{\eta}_4=2\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的矩阵；

(2) 求 $\mathscr{A}$ 的核与值域；

(3) 在 $\mathscr{A}$ 的核中选一组基，把它扩充成 V 的一组基，并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵；

(4) 在 $\mathscr{A}$ 的值域中选一组基，把它扩充为 V 的一组基，并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵.

解 (1)由题设知，由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 的过渡矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\0&-1&1&0\\1&1&1&2\end{bmatrix},$$

故 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2&-3&3&2\\2/3&-4/3&10/3&10/3\\8/3&-16/3&40/3&40/3\\0&1&-7&-8\end{bmatrix}.$$

(2)在核 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$ 中任取一向量

$$\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)',$$

因为 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\mathbf{0}$，所以

$$\boldsymbol{A}(x_1,x_2,x_3,x_4)'=(0,0,0,0)'.$$

解此齐次线性方程组得

$$x_1=-2x_3-x_4,\quad x_2=-\frac{3}{2}x_3-2x_4,\quad x_3=x_3,\quad x_4=x_4.$$

得基础解系$(-4,-3,2,0)'$,$(-1,-2,0,1)'$,于是

$$\boldsymbol{\xi}_1=-4\boldsymbol{\varepsilon}_1-3\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3,\quad \boldsymbol{\xi}_2=-\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4$$

是$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$的一组基.故$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=L(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)$.

因为$\boldsymbol{A}$的秩与$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_4)$的秩相等,而$\boldsymbol{A}$的前两列向量线性无关,而任意三列向量线性相关.故$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)$是一个极大无关组.知

$$\mathscr{A}(V)=L(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_3),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_4))=L(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)).$$

(3) 由题(2)知$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$是$\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$的一组基,由于

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}1&0&-4&-1\\0&1&-3&-2\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{P}_1,$$

知$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$线性无关,所以是$V$的一组基.从而$\mathscr{A}$在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$下的矩阵为

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}5&2&0&0\\9/2&1&0&0\\1&2&0&0\\2&-2&0&0\end{bmatrix}.$$

(4) 同理,由于$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)$是$\mathscr{A}(V)$的一组基,而

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-1&2&0&0\\1&2&1&0\\2&-2&0&1\end{bmatrix}$$

$$=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{P}_2.$$

知$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$线性无关,所以是$V$的一组基,$\mathscr{A}$在基$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$下的矩阵为

$$P_2^{-1}AP_2=\begin{bmatrix}5 & 2 & 2 & 1\\ 9/2 & 1 & 3/2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

例 2 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 V 的线性变换，且 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$，证明：

(1)如果 λ_0 是 $\mathscr{A}$ 的一特征值，则 V_{λ_0} 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间；

(2) $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

证 (1) $\forall\boldsymbol{\xi}\in V_{\lambda_0}$，$\mathscr{A}(\mathscr{B}\boldsymbol{\xi})=\mathscr{B}(\mathscr{A}\boldsymbol{\xi})=\mathscr{B}(\lambda_0\boldsymbol{\xi})=\lambda_0(\mathscr{B}\boldsymbol{\xi})$，故 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\xi})\in V_{\lambda_0}$，即 V_{λ_0} 是 $\mathscr{B}$ 的不变子空间.

(2) $\mathscr{B}|V_{\lambda_0}$ 是 V_{λ_0} 的一个线性变换，在复数域 $\mathbf{C}$ 上，$\mathscr{B}|V_{\lambda_0}$ 必有特征值 λ_1，故 $\exists\boldsymbol{\xi}\in V_{\lambda_0}$，$\boldsymbol{\xi}\neq\mathbf{0}$，使 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\xi})=\lambda_1\boldsymbol{\xi}$. 由于 $\boldsymbol{\xi}\in V_{\lambda_0}$，故必有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi})=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$，从而知 $\boldsymbol{\xi}$ 是 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 的一个公共特征向量.

例 3 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 的可逆线性变换，若 W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，证明 W 也是 $\mathscr{A}^{-1}$ 的不变子空间.

证 若 W 是零子空间，结论显然成立.

若 W 不是零子空间，则任取 W 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 后，可知 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r)$ 也是 W 的一组基. 故 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in W$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_r\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_r),$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})&=\mathscr{A}^{-1}(\mathscr{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r))\\&=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r.\end{aligned}$$

因为 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r\in W$，所以 $\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\in W$. 故 W 也是 $\mathscr{A}^{-1}$ 的不变子空间.

例 4 线性变换 $\mathscr{A}$ 的任意一组特征向量张成的向量空间一定是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证 设 $W=L(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_s)$，其中 $\boldsymbol{x}_i$ 满足 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_i)=\lambda_i\boldsymbol{x}_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$. $\forall\boldsymbol{\alpha}\in W$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=c_1\boldsymbol{x}_1+c_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+c_s\boldsymbol{x}_s,$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=c_1\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_1)+c_2\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_2)+\cdots+c_s\mathscr{A}(\boldsymbol{x}_s)$$

$$=c_1\lambda_1 x_1+c_2\lambda_2 x_2+\cdots+c_s\lambda_s x_s.$$

所以，W 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

例 5 设 $\mathbf{R}^n$ 的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的方阵可表示为对角形，且对角线上元素互异，求 $\mathscr{A}$ 所有不变子空间，问共有多少个？

解 由例 4 知，对任意的 k，$W=L(\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_k})$ 都是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 $(1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n)$.

若 $W_1\subseteq\mathbf{R}^{(n)}$ 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，则 $\mathscr{A}_1=\mathscr{A}|W_1$ 是 W_1 上的线性变换，它的特征值是 $\mathscr{A}$ 的特征值的一部分，不妨设为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$，$r=\dim W_1$，故存在 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\in W_1$，使 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\beta}_1)=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\mathscr{A}_r(\boldsymbol{\beta}_r)=\lambda_1\boldsymbol{\beta}_r$. 由于 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\beta}_i)=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}_i)$，所以 $\boldsymbol{\beta}_i$ 也是 $\mathscr{A}$ 的特征向量，从而 $\boldsymbol{\beta}_i=k_i\boldsymbol{\alpha}_i$，$k_i\neq 0$；于是 $W_1=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$，即知所有不变子空间均可由特征向量张成. 有

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^{n-1}+1=2^n(\text{个}).$$

例 6 若 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_s$ 是线性空间 V 的 s 个两两不同的线性变换，证明：在 V 中必存在向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}_s(\boldsymbol{\alpha})$ 也两两不同.

证 令 $V_{ij}=\{\boldsymbol{\alpha}\,|\,\boldsymbol{\alpha}\in V,\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\alpha})=A_j(\boldsymbol{\alpha})\}$ $(i,j=1,2,\cdots,s)$.

因为 $\mathscr{A}_i(\mathbf{0})=\mathscr{A}_j(\mathbf{0})=\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0}\in V_{ij}$，所以 V_{ij} 非空. 又由题设可知，对于每两个 $\mathscr{A}_i$ 和 $\mathscr{A}_j$，总存在一个向量 $\boldsymbol{\beta}$，使得 $\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\beta})\neq\mathscr{A}_j(\boldsymbol{\beta})$（否则，$\forall\boldsymbol{\beta}\in V$，都有 $\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_j(\boldsymbol{\beta})\Longrightarrow\mathscr{A}_i=\mathscr{A}_j$），所以 V_{ij} 是 V 的真子集.

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V_{ij}$，则 $\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_j(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})$，即知 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in V_{ij}$；又 $\mathscr{A}_i(k\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}_j(k\boldsymbol{\alpha})\Longrightarrow k\boldsymbol{\alpha}\in V_{ij}$，即 $k\boldsymbol{\alpha}\in V_{ij}$. 从而 V_{ij} 是 V 的真子空间.

(1) 若 V_{ij} 都是 V 的非平凡子空间，则由第六章第五节例 16 知，V 中至少有一向量不属于所有的 V_{ij}. 不妨设 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_{ij}$，则 $\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\alpha})\neq\mathscr{A}_j(\boldsymbol{\alpha})$ $(i,j=1,2,\cdots,s)$，即知存在向量 $\boldsymbol{\alpha}$，使 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathscr{A}_s(\boldsymbol{\alpha})$ 两两不相同.

(2) 若 V_{ij} 中有 V 的平凡子空间 $V_{i_0j_0}$，则 $V_{i_0j_0}$ 只能是零空间，此时，只需 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，就有 $\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\alpha})\neq\mathscr{A}_j(\boldsymbol{\alpha})$. 所以可以不考虑这样的 $V_{i_0j_0}$. 其余情形就可以归结为(1)所述的情形.

例 7 设 $\mathscr{A}$ 是有限维线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，$\mathscr{A}(W)$ 表示由 W 中的向量的像组成的子空间，证明：

$$维(\mathscr{A}(W))+维(\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W)=维(W).$$

证 设子空间 W 是 m 维的，W 的子空间 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W$ 是 r 维的，任取 r 维子空间一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$，并将其扩充为 W 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$. 由题设知 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\mathbf{0},\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\mathbf{0},\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_r)=\mathbf{0}$，则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(W)&=\mathscr{A}L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m)\\&=L(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_r,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m)\\&=L(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+2},\cdots,\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m).\end{aligned}$$

再设存在 $k_{r+1},k_{r+2},\cdots,k_m$，使

$$k_{r+1}(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1})+k_{r+2}(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+2})+\cdots+k_m(\mathscr{A}\boldsymbol{\varepsilon}_m)=\mathbf{0},$$

即
$$\mathscr{A}(k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+2}\cdots+k_m\boldsymbol{\varepsilon}_m)=\mathbf{0},$$

于是
$$k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\varepsilon}_m\in\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W.$$

所以，$k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 可以由 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W$ 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r$ 表出. 不妨设

$$k_{r+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{\varepsilon}_{r+2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\varepsilon}_m=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+\cdots+k_r\boldsymbol{\varepsilon}_r,$$

则由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 是一组基知，$k_{r+1}=k_{r+2}=\cdots=k_m=0$，所以 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+1}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_{r+2}),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_m)$ 线性无关，是 $\mathscr{A}(W)$ 的一组基，于是维$(\mathscr{A}W)=m-r$. 故

$$维(\mathscr{A}W)+维(\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\cap W)=维(W).$$

例 8 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换，证明：

$$秩\ \mathscr{A}\mathscr{B}\geqslant秩(\mathscr{A})+秩(\mathscr{B})-n.$$

证 在线性空间 V 中任取一组基，设线性变换 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 在此组基下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，则 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在此组基下的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$. 因为线性变换的秩就是它在任一组基下矩阵的秩，由第四章第三节例 6 知

$$秩(\boldsymbol{AB})\geqslant秩(\boldsymbol{A})+秩(\boldsymbol{B})-n.$$

故相应的线性变换有

$$秩\ \mathscr{A}\mathscr{B}\geqslant秩(\mathscr{A})+秩(\mathscr{B})-n.$$

例 9 设 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2,\cdots,\mathscr{A}_s$ 为线性空间 V 的线性变换，满足：

(1) $\mathscr{A}_i^2=\mathscr{A}$ $(i=1,2,\cdots,s)$;

(2) $\mathscr{A}_i\mathscr{A}_j=0$ $(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,s)$.

证明：$V=\mathscr{A}_1(V)+\mathscr{A}_2(V)+\cdots+\mathscr{A}_s(V)+\bigcap_{i=1}^{s}\mathscr{A}_i^{-1}(\mathbf{0})$.

证 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，令 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}-\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})-\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})-\cdots-\mathscr{A}_s(\boldsymbol{\alpha})$，则

$$\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\alpha})-A_i(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}\ (i=1,2,\cdots,s),$$

从而知 $\boldsymbol{\beta}\in\bigcap_{i=1}^{s}\mathscr{A}_i^{-1}(\mathbf{0})$. 于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{\beta}+\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+\mathscr{A}_s(\boldsymbol{\alpha})\\&\in\mathscr{A}_1(V)+\mathscr{A}_2(V)+\cdots+\mathscr{A}_s(V)+\bigcap_{i=1}^{s}\mathscr{A}_i^{-1}(\mathbf{0}),\end{aligned}$$

故 $$V=\mathscr{A}_1(V)+\mathscr{A}_2(V)+\cdots+\mathscr{A}_s(V)+\bigcap_{i=1}^{s}\mathscr{A}_i^{-1}(\mathbf{0}).$$

设 $$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+\mathscr{A}_s(\boldsymbol{\alpha}_s)+\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0},$$

$$\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\alpha}_i)\in\mathscr{A}_i(V),\quad\boldsymbol{\gamma}\in\bigcap_{i=1}^{s}\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0}),$$

则

$$\mathscr{A}_i[\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}_1)+\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+\mathscr{A}_s(\boldsymbol{\alpha}_s)+\boldsymbol{\gamma}]=\mathscr{A}_i(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathbf{0}\ (i=1,2,\cdots,s).$$

从而知 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$，即零元素分解唯一，故

$$V=\mathscr{A}_1(V)+\mathscr{A}_2(V)+\cdots+\mathscr{A}_s(V)+\bigcap_{i=1}^{s}\mathscr{A}_i^{-1}(\mathbf{0}).$$

例 10 设 $\mathscr{A}^2=\mathscr{A},\mathscr{B}^2=\mathscr{B}$，证明：

(1) $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有相同值域的充分必要条件是 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$;

(2) $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有相同核的充分必要条件是 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{A},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

证 (1)必要性 若 $\mathscr{A}(V)=\mathscr{B}(V)$，则任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，有 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})\in\mathscr{B}(V)=\mathscr{A}(V)$，故存在向量 $\boldsymbol{\beta}\in V$，使 $\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$，于是

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}).$$

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 的任意性知，$\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B}$.

同理可证 $\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$.

充分性 若 $\mathscr{A}\mathscr{B}=\mathscr{B},\mathscr{B}\mathscr{A}=\mathscr{A}$，则任取 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})\in\mathscr{A}(V)\subseteq V$，有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{B}\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})\in\mathscr{B}(V)，即\ \mathscr{A}(V)\subseteq\mathscr{B}(V).$$

同理 $\mathscr{B}(V)\subseteq\mathscr{A}(V)$. 所以 $\mathscr{A}(V)=\mathscr{B}(V)$，即有相同值域.

(2) 必要性　若 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=\mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$,则 $\forall \boldsymbol{\beta}\in V$,作 $\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})$,因为

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})-\mathscr{A}^2(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})=\mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})\in\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=\mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$,于是有

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta}-\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=\mathscr{B}(\boldsymbol{\beta})-(\mathscr{B}\mathscr{A})\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},\quad 即\quad \mathscr{B}(\boldsymbol{\beta})=(\mathscr{B}\mathscr{A})\boldsymbol{\beta}.$$

由 $\boldsymbol{\beta}$ 的任意性知,$\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$.

类似可证 $\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{B}$.

充分性　若 $\mathscr{A}=\mathscr{A}\mathscr{B},\mathscr{B}=\mathscr{B}\mathscr{A}$,则 $\forall \boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})$,由于

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{B}\mathscr{A})\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{B}(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{B}(\mathbf{0})=\mathbf{0},$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$,从而 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\subseteq\mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$.

类似可证 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})\supseteq\mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$. 从而 $\mathscr{A}^{-1}(\mathbf{0})=\mathscr{B}^{-1}(\mathbf{0})$,即 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 有相同的核.

第五节　若尔当标准形与最小多项式

主要内容

1. 定义 1　形式为

$$\boldsymbol{J}(\lambda,t)=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda\end{bmatrix}_{t\times t}$$

的矩阵称为**若尔当(Jordan)块**,其中 λ 是复数. 由若干个若尔当块组成的准对角矩阵称为**若尔当形矩阵**,其一般形状如

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i\end{bmatrix}.$$

式中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 可以有部分相等.

在一个线性变换的若尔当标准形中，主对角线上的元素正是特征多项式的全部根(重根按重数计算).

2. 引理 n 维线性空间 V 上线性变换 $\mathscr{B}$ 满足 $\mathscr{B}^k=\mathscr{O}$，$k$ 是某正整数，就称 $\mathscr{B}$ 为 V 上幂零线性变换. 对幂零线性变换 $\mathscr{B}$，V 中必有下列形式的一组元素作基.

$$
\begin{array}{cccc}
\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_s \\
\mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}_1) & \mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & \mathscr{B}(\boldsymbol{\alpha}_s) \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\mathscr{B}^{k_1-1}(\boldsymbol{\alpha}_1) & \mathscr{B}^{k_2-1}(\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & \mathscr{B}^{k_s-1}(\boldsymbol{\alpha}_s) \\
(\mathscr{B}^{k_1}(\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}) & (\mathscr{B}^{k_2}(\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}) & \cdots & (\mathscr{B}^{k_s}(\boldsymbol{\alpha}_s)=\mathbf{0})
\end{array}
$$

于是，$\mathscr{B}$ 在这些基下的矩阵为

$$
\begin{bmatrix}
\underbrace{\begin{matrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{matrix}}_{k_1} & & & \\
& \underbrace{\begin{matrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{matrix}}_{k_2} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \underbrace{\begin{matrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{matrix}}_{k_s}
\end{bmatrix}.
$$

定理 1 设 $\mathscr{A}$ 是复数域上线性空间 V 的一个线性变换，则在 V 中必定存在一组基，使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当形矩阵.

定理 2 每个 n 级复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一个若尔当形矩阵相似.

3. 任给数域 P 上一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，总可以找到数域 P 上一个多项式 $f(x)$，使 $f(\boldsymbol{A})=\mathbf{0}$. 以 $\boldsymbol{A}$ 为根的次数最低的首项系数为 1 的多项式称为 $\boldsymbol{A}$ 的**最小多项式**.

引理 1 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是唯一的.

引理 2 设 $g(x)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式,则 $f(x)$ 以 $\boldsymbol{A}$ 为根的充分必要条件是 $g(x)$ 整除 $f(x)$.

引理 3 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个准对角矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \\ & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$,并设 $\boldsymbol{A}_1$ 的最小多项式为 $g_1(x)$,$\boldsymbol{A}_2$ 的最小多项式为 $g_2(x)$,则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $g_1(x)$,$g_2(x)$ 的最小公倍式 $[g_1(x),g_2(x)]$.

引理 4 k 级若尔当块

$$\boldsymbol{J}=a\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a\end{bmatrix}$$

的最小多项式为 $(x-a)^k$.

定理 3 数域 P 上 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充分必要条件为 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是 P 上互素的一次因式的乘积.

推论 复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式没有重根.

疑 难 解 析

若尔当块与若尔当矩阵有什么意义?

答 对于数域 P 上 n 维线性空间的一组基,线性变换 $\mathscr{A}$ 与一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相对应,在不同的基下对应的矩阵是相似的. 我们自然希望 $\boldsymbol{A}$ 的形式越简单越好,这样研究和使用起来都更为方便. 矩阵最简单的形式莫过于对角矩阵,但并不是每一个线性变换都有一组基使它在这组基下的矩阵成为对角形. 因此,转而寻求另一种较为简单的形式:由若干个若尔当块组成的若尔当形矩阵. 若尔当块是比较简单的下三角矩阵,故若尔当形矩阵也是下三角矩阵.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}13 & 16 & 14\\ -6 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{bmatrix}$ 的若尔当标准形.

解 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-13 & -16 & -14\\ 6 & \lambda+7 & 6\\ 6 & 8 & \lambda+7\end{bmatrix}\xrightarrow[c_1+c_3]{c_2+c_3}\begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & -14\\ 0 & \lambda+1 & 6\\ -\lambda-1 & 1-\lambda & \lambda+7\end{bmatrix}$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}\lambda+1 & -2 & -14\\ 0 & \lambda+1 & 6\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2(\lambda-1)\end{bmatrix},$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda-1,(\lambda+1)^2$. 它们所对应的若尔当块分别为

$$\boldsymbol{J}_1=(1),\quad \boldsymbol{J}_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为 $\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$.

例 2 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵是一若尔当块. 证明：

(1) V 中包含 $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ 的 $\mathscr{A}$-子空间只有 V 自身；

(2) V 中任一非零 $\mathscr{A}$-子空间都包含 $\boldsymbol{\varepsilon}_n$；

(3) V 不能分解为两个非平凡的 $\mathscr{A}$-子空间的直和.

证 (1) 设 $\quad\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{A}$,

其中 $\boldsymbol{A}$ 为一若尔当块.

设 V^* 为 $\mathscr{A}$ 的任一不变子空间，且 $\boldsymbol{\varepsilon}_1\in V^*$，则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)\in V^*$. 由于 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2$，故 $\boldsymbol{\varepsilon}_2\in V^*$.

同理 $\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\in V^*$. 因此，$V^*=V$.

(2) 设 W 为 $\mathscr{A}$ 的任一非零不变子空间，$\boldsymbol{\xi}\in W,\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，不妨设 $\boldsymbol{\xi}=$

$\sum_{i=1}^{n} k_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$. 由于 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 不全为零，可设 k_t 是第一个不为零的数.

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}) + k_n\lambda\boldsymbol{\varepsilon}_n$$

$$= \lambda\sum_{i=1}^{n} k_i\boldsymbol{\varepsilon}_i + \sum_{j=1}^{n-1} k_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1} = \lambda\boldsymbol{\xi} + \sum_{j=1}^{n-1} k_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1}.$$

因为
$$\boldsymbol{\xi}_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}) \in W \Rightarrow \sum_{j=1}^{n-1} k_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1} \in W.$$

令 $\boldsymbol{\xi}_1 = \sum_{j=1}^{n-1} k_j\boldsymbol{\varepsilon}_{j+1} \Rightarrow \mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_1) = \lambda\boldsymbol{\xi}_1 + \sum_{i=1}^{n-2} k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+2} \in W$；

令 $\boldsymbol{\xi}_2 \doteq \sum_{i=1}^{n-2} k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+2} \Rightarrow \mathscr{A}(\boldsymbol{\xi}_2) = \lambda\boldsymbol{\xi}_2 + \sum_{i=1}^{n-3} k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+3} \in W$.

如此继续，则有 $\boldsymbol{\xi}_{n-t} = \sum_{i=1}^{t} k_i\boldsymbol{\varepsilon}_{i+(n-t)} = \sum_{i=1}^{t} k_i\boldsymbol{\varepsilon}_n \in W$. 由于 $k_1 = k_2 = \cdots = k_{t-1} = 0$，故 $\boldsymbol{\xi}_{n-t} = k_t\boldsymbol{\varepsilon}_n$. 又由 $k_t \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}_n \in W$.

(3) 设 V_1, V_2 是 $\mathscr{A}$ 的两个非平凡子空间，由题(2)知，$\boldsymbol{\varepsilon}_n \in V_1 \cap V_2$，故和 $V_1 + V_2$ 不是直和，所以 V 不能分解成 $\mathscr{A}$ 的两个非平凡子空间的直和.

例 3 求下列矩阵的最小多项式：

(1) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

解 (1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ 的因式，计算知 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E} \neq \boldsymbol{O}$，而 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{O}$，故 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $(\lambda-1)(\lambda+1)$.

(2)矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 3 & -1\\ 1 & \lambda-3 & -1 & 3\\ -3 & 1 & \lambda+3 & -1\\ 1 & -3 & -1 & \lambda+3\end{vmatrix}=\lambda^4.$$

由于 A 的最小多项式为 λ^4 的因式，计算得 $A\neq O, A^2=O$. 故 A 的最小多项式为 λ^2.

例 4 设 A 是数域 P 上任意 n 级方阵，证明：

(1) 方阵 A 的最小多项式整除以 A 为根的任何多项式；

(2) A 的最小多项式存在，且是唯一的.

证 (1) 设 $g(\lambda)$ 是 A 的最小多项式，而 $f(\lambda)$ 是任一以 A 为根的多项式. 令 $f(\lambda)=q(\lambda)g(\lambda)+r(\lambda)$，式中 $r(\lambda)=0$ 或 $r(\lambda)$ 次$<$ $g(\lambda)$ 次，则

$$f(A)=q(A)g(A)+r(A).$$

因为 $f(A)=g(A)=0$，故 $r(A)=0$. 由于 $g(\lambda)$ 是 A 的最小多项式，故 $r(\lambda)=0\Longrightarrow g(\lambda)\mid f(\lambda)$.

(2)设 $f(\lambda)=|\lambda E-A|$ 为 A 的特征多项式，则依哈密顿-凯莱定理，$f(A)=0$，知最小多项式存在.

设 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 都是 A 的最小多项式，则由题(1)知 $g_1(\lambda)\mid g_2(\lambda)$，$g_2(\lambda)\mid g_1(\lambda)$，而 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 首项系数均为 1，故必 $g_1(\lambda)=g_2(\lambda)$，即最小多项式唯一.

例 5 证明：相似方阵有相同的最小多项式.

证 设方阵 A 与 B 相似，即存在可逆矩阵 P，使 $B=P^{-1}AP$.

又设 A 与 B 的最小多项式分别为 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$，则

$$g_1(B)=g_1(P^{-1}AP)=P^{-1}g_1(A)P=0.$$

但是，B 的最小多项式整除以 B 为根的多项式，故 $g_2(\lambda)\mid g_1(\lambda)$. 同理可得 $g_1(\lambda)\mid g_2(\lambda)$. 而 $g_1(\lambda), g_2(\lambda)$ 首项系数都是 1，所以 $g_1(\lambda)=g_2(\lambda)$. 命题得证.

*第八章　λ-矩阵

λ-矩阵的引入,可以更好地研究矩阵在相似变换下的化简问题.

第一节　λ-矩阵在初等变换下的标准形　不变因子

主要内容

1. 以多项式环 $P[\lambda]$中多项式为元素的矩阵,称为 λ-**矩阵**.

λ-矩阵有加、减、乘及多项式乘以矩阵的运算,有与数字矩阵相同的运算法则.λ-矩阵也有行列式、余子式、代数余子式和伴随矩阵的概念.

定义 1　若λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$中有一个 $r(r\geqslant 1)$阶子式不为零,而所有 $r+1$ 阶子式都为零,则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的**秩**为 r.

零矩阵的秩规定为零.

定义 2　若有一个 $n\times n$ 的λ-矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)$使

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{E},$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 级单位阵,则称 $n\times n$ 的λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$是**可逆的**. $\boldsymbol{B}(\lambda)$(是唯一的)称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$的**逆矩阵**,记为 $\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda)$.

定理 1　一个 $n\times n$ 的λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$可逆的充分必要条件是行列式$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$是非零的数,且有

$$\boldsymbol{A}^{-1}(\lambda)=\frac{1}{|\boldsymbol{A}(\lambda)|}\boldsymbol{A}^{*}(\lambda).$$

2. **定义 3**　下面的三种变换称为λ-矩阵的**初等变换**:

(1) 矩阵的两行(列)互换位置;

(2) 矩阵的某一行(列)乘以非零常数 c;

(3) 矩阵的某一行(列)加另一行的 $\varphi(\lambda)$ 倍,$\varphi(\lambda)$ 是 λ 的多项式.

与数字矩阵一样,λ-矩阵也存在与初等变换相应的初等矩阵.

3. 定义 4 若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 可以经过一系列初等变换化为 $\boldsymbol{B}(\lambda)$,则称 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价.

等价具有下列性质:

(1) 反身性 每一个 λ-矩阵与自己等价;

(2) 对称性 若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价,则 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 等价;

(3) 传递性 若 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价,$\boldsymbol{B}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{C}(\lambda)$ 等价,则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{C}(\lambda)$ 等价.

矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价的充分必要条件为存在一系列初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$,使

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t.$$

或存在可逆阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 和 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$,使

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda).$$

4. 引理 设 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda)\neq 0$,且 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它除尽,则一定可以找到一个与 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 等价的矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)$,它的左上角元素也不为零,但其次数低于 $a_{11}(\lambda)$ 的次数.

定理 2 任意一个非零的 $s\times n$ 的 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 都等价于下列形式的矩阵:

$$\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad ①$$

其中 $r\geqslant 1$，$d_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,r)$ 是首项系数为 1 的多项式，且 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,r-1)$. 这个矩阵称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的标准形.

5. 定义 5 设 λ-矩阵的秩为 r，对于正整数 k，$1\leqslant k\leqslant r$，$\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中必有非零的 k 阶子式. $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中全部 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的 k 阶**行列式因子**.

定理 3 等价的 λ-矩阵具有相同的秩与相同的各阶行列式因子.

定理 4 λ-矩阵的标准形是唯一的.

6. 定义 6 标准形的主对角线上的非零元素 $d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)$，$\cdots d_r(\lambda)$ 称为 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的**不变因子**.

定理 5 两个 λ-矩阵等价的充分必要条件是它们有相同的行列式因子，或者它们有相同的不变因子.

定理 6 矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 可逆的充分必要条件是它可以表成一系列初等矩阵的乘积，即

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t.$$

推论 两个 $s\times n$ 的 λ-矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价的充分必要条件是，有一个 $s\times s$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 与一个 $n\times n$ 可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$，使

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda).$$

疑 难 解 析

1. 怎样求矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式因子?

答 依照定义求出 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中非零 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式 $D_k(\lambda)$. 通常先求较高阶的行列式因子. 这样，可以通过较高阶行列式因子大致确定低阶行列式因子的范围.

通过行列式因子求矩阵标准形一般步骤是：

计算各阶行列式因子 ⟶ 计算不变因子 ⟶ 标准形

一般适用易于计算各阶行列式因子的矩阵.

2. 怎样由矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式因子求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子?

答 设矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的秩为 r，行列式因子为 $D_1(\lambda)$，$D_2(\lambda)$，$\cdots$，

$D_r(\lambda)$，$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子为$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$，则$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子与行列式因子间有如下关系：

$$\begin{cases}D_1(\lambda)=d_1(\lambda),\\D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda),\\\quad\vdots\\D_r(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_r(\lambda).\end{cases}$$

所以，不变因子可由行列式因子求得

$$\begin{cases}d_1(\lambda)=D_1(\lambda),\\d_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda),\\\quad\vdots\\d_r(\lambda)=D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda).\end{cases}$$

行列式因子与不变因子是相互确定的.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 证明：两个等价的λ-矩阵的行列式只相差一个非零的常数.

证 若$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$等价，则存在可逆阵$\boldsymbol{P}(\lambda)$，$\boldsymbol{Q}(\lambda)$，也是λ-矩阵，使

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{P}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda),$$

于是 $|\boldsymbol{B}(\lambda)|=|\boldsymbol{P}(\lambda)||\boldsymbol{A}(\lambda)||\boldsymbol{Q}(\lambda)|=a|\boldsymbol{A}(\lambda)|b=ab|\boldsymbol{A}(\lambda)|$，

式中a,b为非零常数.

例 2 秩为n的n阶λ-矩阵称为满秩的，问：满秩的λ-矩阵是否一定可逆？下列矩阵哪个满秩，哪个可逆？

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&\lambda\text{-}1&\lambda\\\lambda&1&\lambda^2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}(\lambda)=\begin{bmatrix}1&\lambda&0\\2&\lambda&1\\\lambda^2+1&2&\lambda+3\end{bmatrix}.$$

解 n阶满秩λ-矩阵不一定可逆，如$\boldsymbol{A}(\lambda)$满秩但不可逆，$\boldsymbol{B}(\lambda)$满秩且可逆.

例 3 化下列λ-矩阵为标准形：

(1) $\begin{bmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$;　　　(2) $\begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{bmatrix}$;

(6) $\begin{bmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

解　求λ-矩阵的标准形，可用初等变换法和行列式因子法. 对阶数较低的λ-矩阵可用初等变换法，阶数较高时计算量太大，初等变换法的优点是可以同时求出可逆阵 $\boldsymbol{P}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$. 行列式因子法见疑难解析.

(1) 用初等变换求.

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_2]{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix} 3\lambda & \lambda^2+5\lambda \\ 2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda \end{bmatrix}\xrightarrow[r_2-2\lambda r_1]{r_2\times 3}\begin{bmatrix} 3\lambda & \lambda^2+5\lambda \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda \end{bmatrix}.$$

用行列式因子与不变因子关系求.

因为 $D_1(\lambda)=\lambda, D_2(\lambda)=|\boldsymbol{A}(\lambda)|=\lambda^4-10\lambda^3-3\lambda^2$，所以不变因子

$$d_1(\lambda)=\lambda, d_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)=\lambda^3-10\lambda-3\lambda,$$

故 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的标准形为 $\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^3-10\lambda^2-3\lambda\end{bmatrix}$.

(2) 用初等变换法求.

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\xrightarrow[c_2+c_3]{c_1+c_3}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & \lambda\\ 0 & 0 & -\lambda\\ 1 & 0 & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{c_3+\lambda^2c_1}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & \lambda^2+\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1-\frac{c_2}{\lambda^2+\lambda}]{c_3-c_2}\begin{bmatrix}0 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{c_2'\times(-1)\\ r_1\leftrightarrow r_3}]{c_3\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda^2+\lambda\end{bmatrix}.$$

(3) 用初等变换法求.

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\xrightarrow[c_3-c_1-c_2]{r_3+r_1+r_2}\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & -\lambda^2-\lambda\\ 0 & \lambda & -\lambda\\ \lambda^2+\lambda & \lambda & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+\lambda r_3]{r_1-(\lambda+1)r_2}\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & -\lambda(\lambda+1) & 0\\ \lambda^3+\lambda^2 & \lambda & 0\\ \lambda^2+\lambda & \lambda & 1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\end{bmatrix}.$$

(4) 用行列式因子法求.

$$D_1(\lambda)=1,\quad D_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1),$$

$$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2,\quad D_4(\lambda)=\lambda^4(\lambda-1)^4,$$

从而 $\quad d_1(\lambda)=1,\quad d_2(\lambda)=D_2(\lambda)/D_1(\lambda)=\lambda(\lambda-1),$

$$d_3(\lambda)=D_3(\lambda)/D_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1),$$

$$d_4(\lambda)=D_4(\lambda)/D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2.$$

故 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0\\0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0\\0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^2\end{bmatrix}.$$

(5) 用初等变换法求.

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \lambda-1 & 0\\0 & 0 & (\lambda-1)^2(\lambda+1)\end{bmatrix}.$$

(6) 用初等变换法将 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 化简,再用行列式因子与不变因子求标准形.

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & \lambda & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix},$$

故
$$D_1(\lambda)=1=D_2(\lambda)=D_3(\lambda),$$
$$D_4(\lambda)=\lambda(\lambda-1),\quad D_5(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^2.$$

从而
$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1,$$
$$d_4(\lambda)=D_4(\lambda)/D_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1),$$
$$d_5(\lambda)=D_5(\lambda)/D_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1).$$

$\boldsymbol{A}(\lambda)$标准形为

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & \lambda(\lambda-1) & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)\end{bmatrix}.$$

例 4 求下列 λ-矩阵的不变因子:

(1) $\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$; (2) $\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{bmatrix}$;

(3) $\begin{bmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ \beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{bmatrix}$;

(4) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

(5) $\begin{bmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{bmatrix}$.

解 可用行列式因子法求.

(1) $D_1(\lambda)=1=D_2(\lambda)$, $D_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$,故不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, \quad d_3(\lambda)=D_3(\lambda)/D_2(\lambda)=(\lambda-2)^3.$$

(2) $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$, $D_3(\lambda)=1$, $D_4(\lambda)=|\boldsymbol{A}(\lambda)|=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$,故不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, \quad d_4(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5.$$

(3) 当 $\beta=0$ 时, $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=0$, $D_3(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2$, $D_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^4$,故不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=1, \quad d_3(\lambda)=d_4(\lambda)=(\lambda+\alpha)^2.$$

当 $\beta\neq 0$ 时,依拉普拉斯定理按前两行展开,得

$$D_4(\lambda)=[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2,$$

又由于 $\begin{vmatrix} \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{vmatrix}=(\lambda+\alpha)[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]$,

$$\begin{vmatrix} \beta & 1 & 0 \\ \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{vmatrix} = \beta^2-(\lambda+\alpha)^2,$$

而 $$((\lambda+\alpha)[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2],\beta^2-(\lambda+\alpha)^2)=1,$$

从而知 $D_3(\lambda)=1, D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1$. 于是,不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, \quad d_4(\lambda)=[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2.$$

(4) 因

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & \lambda+2 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad |\boldsymbol{A}(\lambda)|=(\lambda+2)^4,$$

故 $D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1, D_4(\lambda)=(\lambda+2)^4$,所以不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, \quad d_4(\lambda)=(\lambda+2)^4.$$

(5) 有四个非零的三阶子式,分别为

$$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2), \quad (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2),$$
$$(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda+2), \quad (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2).$$

所以 $$D_3(\lambda)=1 \Longrightarrow D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=1,$$
$$D_4(\lambda)=|\boldsymbol{A}(\lambda)|=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4).$$

于是,不变因子为

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1, \quad d_4(\lambda)=(\lambda^2-1)(\lambda^2-4).$$

例 5 证明

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{bmatrix}$$

的不变因子是 $n-1$ 个 1 和 $f(\lambda)$,其中

$$f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

证 对$|\boldsymbol{A}(\lambda)|$施行变换 $r_i+\lambda r_{i+1}$，从 $i+1=n$ 开始，可得

$$|\boldsymbol{A}(\lambda)|=\begin{vmatrix}0&0&0&\cdots&0&f(\lambda)\\-1&0&0&\cdots&0&*\\0&-1&0&\cdots&0&*\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&-1&*\end{vmatrix}$$

$$=f(\lambda)\cdot(-1)^{(1+n)+(n-1)}=f(\lambda),$$

又 $\boldsymbol{A}(\lambda)$中左下角的 $n-1$ 阶子式等于$(-1)^{n-1}$，故有

$$D_{n-1}(\lambda)=1\Longrightarrow D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=\cdots=D_{n-2}(\lambda)=1,$$

$$D_n(\lambda)=f(\lambda).$$

于是 $$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=\cdots=d_{n-1}(\lambda)=1,d_n(\lambda)=f(\lambda).$$

命题得证.

例 6 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上一个 $n\times n$ 矩阵，证明:$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$相似.

证 因为 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}'$对应的子式恰为相互转置，所以它们对应的 k 级子式相等. 从而 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}'$有相同的行列式因子和不变因子. 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}'$相似.

例 7 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^k$.

证 由第四章第一节例 2(7)知

$$\boldsymbol{A}^k=\begin{bmatrix}\lambda&0&0\\1&\lambda&0\\0&1&\lambda\end{bmatrix}^k=\left[\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}'\right]^k=\left[\begin{bmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{bmatrix}^k\right]'$$

$$=\begin{bmatrix}\lambda^k&k\lambda^{k-1}&\dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}\\0&\lambda^k&k\lambda^{k-1}\\0&0&\lambda^k\end{bmatrix}'=\begin{bmatrix}\lambda^k&0&0\\k\lambda^{k-1}&\lambda^k&0\\\dfrac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}&k\lambda^{k-1}&\lambda^k\end{bmatrix}.$$

第二节　矩阵相似的条件　初等因子

主要内容

1. 引理 1　若有 $n\times n$ 数字矩阵 $\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{Q}_0$，使

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_0(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}_0,$$

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

引理 2　对于任何不为零的 $n\times n$ 数字矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 λ-矩阵 $\boldsymbol{U}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{V}(\lambda)$，一定存在 λ-矩阵 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 与 $\boldsymbol{R}(\lambda)$ 以及数字矩阵 $\boldsymbol{U}_0$ 和 $\boldsymbol{V}_0$，使

$$\boldsymbol{U}(\lambda)=(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)+\boldsymbol{U}_0,\quad \boldsymbol{V}(\lambda)=\boldsymbol{R}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{V}_0.$$

定理 1　设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是数域 P 上两个 $n\times n$ 矩阵. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 等价.

推论　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是它们有相同的不变因子.

2. 定义 1　把矩阵 $\boldsymbol{A}$（或线性变换 $\mathscr{A}$）的每个次数大于零的不变因子分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，所有这些一次因式方幂（相同的必须按出现的次数计算）称为矩阵 $\boldsymbol{A}$（或初等变换 $\mathscr{A}$）的**初等因子**.

3. 定理 2　两个同级复数矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的初等因子.

引理　设

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} f_1(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_2(\lambda)g_2(\lambda)\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}(\lambda)=\begin{bmatrix} f_2(\lambda)g_1(\lambda) & 0 \\ 0 & f_1(\lambda)g_2(\lambda)\end{bmatrix},$$

如果多项式 $f_1(\lambda),f_2(\lambda)$ 都与 $g_1(\lambda),g_2(\lambda)$ 互素，则 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 和 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 等价，记为 $\boldsymbol{A}(\lambda)\sim\boldsymbol{B}(\lambda)$.

定理 3　首先用初等变换化特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 为对角形式，然

后将主对角线上的元素分解成互不相同的一次因式方幂的乘积，则所有这些一次因式的方幂(相同的按出现的次数计算)就是 **A** 的全部初等因子.

疑 难 解 析

不变因子与初等因子有何关系?

矩阵 **A** 的行列式因子、不变因子与初等因子都是 λ-矩阵在初等变换下的不变量.

我们可以由 **A** 的不变因子求 **A** 的初等因子，其作法是：

若 **A** 的不变因子 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 为已知，将 $d_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 分解为互不相同的一次因式方幂的乘积

$$d_1(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{1r}},$$

$$d_2(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{2r}},$$

$$\vdots$$

$$d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{n1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{n2}}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{k_{nr}},$$

则其中对应于 $k_{ij}\geqslant 1$ 的方幂 $(\lambda-\lambda_i)^{k_{ij}}$ $(k_{ij}\geqslant 1)$ 就是 **A** 的全部初等因子.

由 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 可知，在同一个一次因式的方幂作成的初等因子中，方次最高的必在 $d_n(\lambda)$ 的分解中出现，方次次高的必在 $d_{n-1}(\lambda)$ 的分解中出现.

也可由定理 3 不经不变因子直接求出 **A** 的全部初等因子.

矩阵及其标准形、行列式因子、不变因子以及秩与初等因子之间的关系如图 8-1 所示.

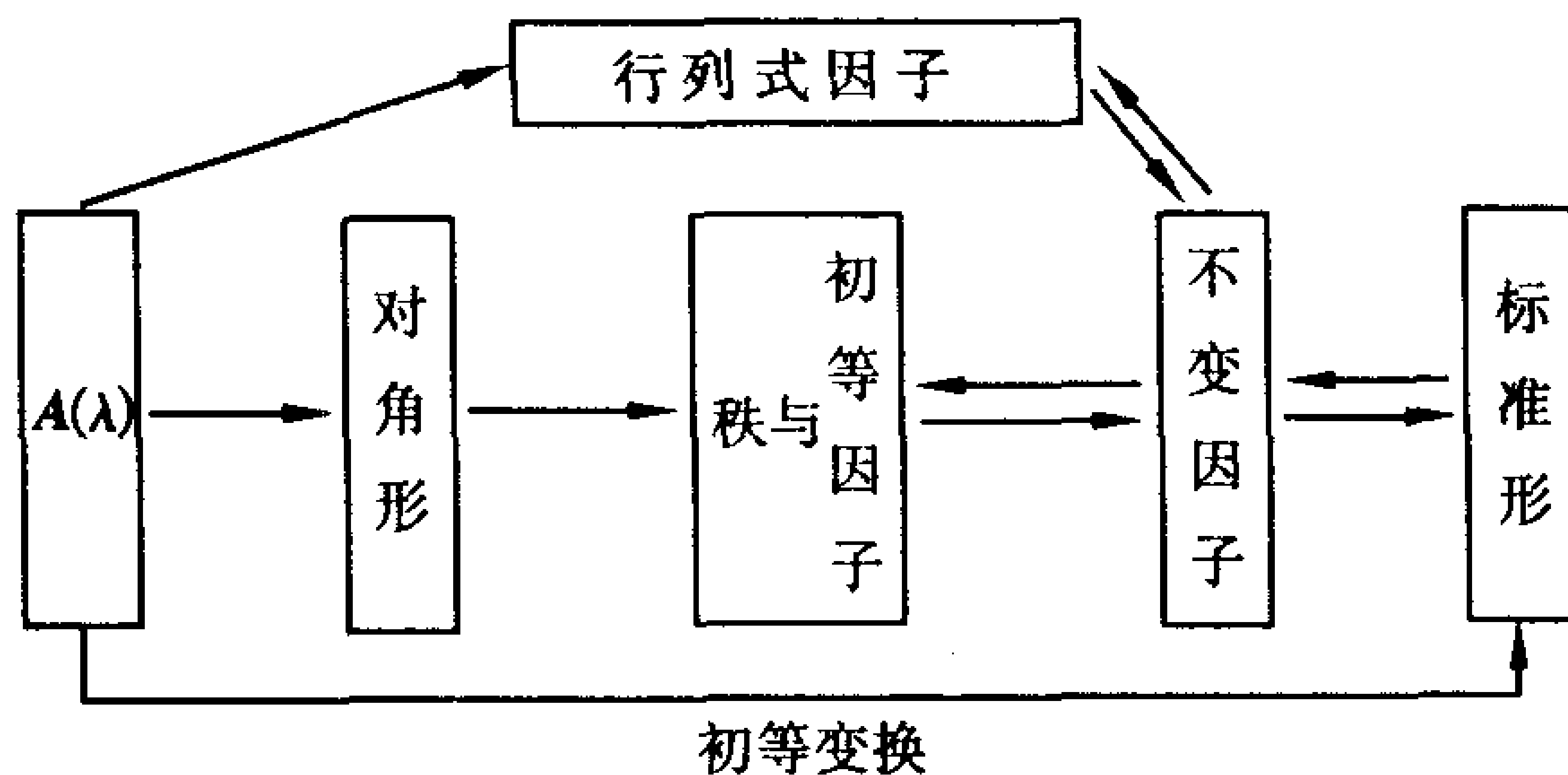


图 8-1

方法、技巧与典型例题分析

熟悉初等因子与不变因子的关系，会求矩阵的初等因子，并通过初等因子讨论矩阵的等价与标准形等命题.

例 1 求矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-a & c_1 & & & \\ & \lambda-a & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & c_{n-1} \\ & & & \lambda-a & \end{bmatrix}$$

的不变因子与初等因子组. 式中 c_i $(i=1,2,\cdots,n-1)$ 为非零常数.

解 因为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的行列式因子为

$$D_1(\lambda)=1,\ \cdots,\ \ D_{n-1}(\lambda)=1,\ \ D_n(\lambda)=(\lambda-a)^n,$$

所以，不变因子为

$$d_1(\lambda)=1,\ \cdots,\ \ d_{n-1}(\lambda)=1,\ \ d_n(\lambda)=(\lambda-a)^n,$$

故初等因子组为 $(\lambda-a)^n$.

例 2 设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 为 5 阶 λ-矩阵，秩为 4，初等因子为 $\lambda,\lambda^2,\lambda^2,\lambda-1,\lambda-1,\lambda+1,(\lambda+1)^3$，求 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的标准形.

解 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的标准形也是 5 阶矩阵，秩是 4，故 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的不变因子为

$$d_5(\lambda)=0,\quad d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3,$$
$$d_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1),\quad d_2(\lambda)=\lambda,\quad d_1(\lambda)=1.$$

于是，$\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \lambda^2(\lambda^2-1) & & \\ & & & \lambda^2(\lambda-1)(\lambda+1)^3 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

例 3 证明下列方阵任何两个都不相似：

$$A_1=\begin{bmatrix} r_1 & & \\ & r_1 & \\ & & r_1 \end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix} r_1 & & \\ & r_1 & 1 \\ & & r_1 \end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix} r_1 & 1 & \\ & r_1 & 1 \\ & & r_1 \end{bmatrix}.$$

证 因为它们的初等因子各不相同，其中：

A_1 的初等因子为 $\lambda-r_1,\lambda-r_1,\lambda-r_1$，

A_2 的初等因子为 $(\lambda-r_1),(\lambda-r_1)^2$，

A_3 的初等因子为 $(\lambda-r_1)^3$，

所以 A_1,A_2,A_3 任何两个都不相似.

例 4 设 $A\in M_n(P)$，$d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$ 为 A 的不变因子，λ_0 是 A 的一个特征值. 证明：A 的属于特征值 A 的初等因子的个数 $t=n-$秩 $(\lambda_0 E-A)$.

证 设 A 的属于特征值 λ_0 的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_0)^{r_1},\quad (\lambda-\lambda_0)^{r_2},\quad \cdots,\quad (\lambda-\lambda_0)^{r_t},\quad r_1\geqslant r_2\geqslant\cdots\geqslant r_t\geqslant 1,$$

则可知 $(\lambda-\lambda_0)^{r_1}$ 是 $d_n(\lambda)$ 的因子，$(\lambda-\lambda_0)^{r_2}$ 是 $d_{n-1}(\lambda)$ 的因子……$(\lambda-\lambda_0)^{r_t}$ 是 $d_{n-t+1}(\lambda)$ 的因子. 且 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_{n-t}(\lambda)$ 不再含 $(\lambda-\lambda_0)$ 的方幂的因子，故

$$d_1(\lambda_0)\neq 0,\quad d_2(\lambda_0)\neq 0,\quad \cdots,\quad d_{n-t}(\lambda_0)\neq 0,$$
$$d_{n-t+1}(\lambda_0)=0,\quad \cdots,\quad d_n(\lambda_0)=0.$$

又知，存在可逆矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$，使得

$$P(\lambda)(\lambda E-A)Q(\lambda)=\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_{n-t}(\lambda) & & & \\ & & & & d_{n-t+1}(\lambda) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & d_n(\lambda) \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}(\lambda_0)(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda_0)=\begin{bmatrix} d_1(\lambda_0) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_{n-t}(\lambda_0) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$.

因为 $\boldsymbol{P}(\lambda)$,$\boldsymbol{Q}(\lambda)$可逆,所以 $\boldsymbol{P}(\lambda_0)$,$\boldsymbol{Q}(\lambda_0)$也可逆,故

$$\text{秩}(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=\text{秩}(\boldsymbol{P}(\lambda_0)(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda_0))=n-t.$$

从而,知 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的初等因子的个数

$$t=n-\text{秩}(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}).$$

例 5 证明:复数域上方阵 $\boldsymbol{A}$ 与一个对角矩阵相似的充分必要条件是,$\boldsymbol{A}$ 的最小多项式没有重根.

证 充分性 设 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子为 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$,则其最后一个因子 $d_n(\lambda)$是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式. 若 $d_n(\lambda)$无重根,则由 $d_i(\lambda)\mid d_{i+1}(\lambda)$知,每个 $d_i(\lambda)$都无重根,故知 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子都是一次的,从而 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似(见下节定理 3).

必要性 若 $\boldsymbol{A}$ 与一个对角矩阵相似,则 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的初等因子都是一次的,从而 $d_n(\lambda)$是不同的一次因子的积,所以 $d_n(\lambda)$无重根. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的最后一个不变因子 $d_n(\lambda)$,故没有重根.

例 6 在复数域中,n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当形矩阵中的若尔当块可否换为

$$\begin{bmatrix} \rho & a & & \\ & \rho & a & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \rho & a \end{bmatrix} \quad (a\neq 0)$$

的形式? 为什么?

解 可以,因为其初等因子为$(\lambda-\rho)^m$.

第三节　矩阵的有理标准形

主要内容

1. 定理 1　每个 n 级的复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一个若尔当形矩阵相似，这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被矩阵 $\boldsymbol{A}$ 唯一决定的，它称为 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形.

定理 2　设 $\mathscr{A}$ 是复数域上 n 维线性空间 V 的线性变换，在 V 中必存在一组基，使 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵是若尔当形，并且这个若尔当形矩阵除去其中若尔当块的排列次序外是被 $\mathscr{A}$ 唯一决定的.

定理 3　复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的初等因子全为一次的.

定理 4　复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵相似的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的不变因子都没有重根.

2. 定义 1　对数域 P 上的一个多项式

$$d(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n,$$

称矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & \vdots & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad ①$$

为多项式 $d(\lambda)$ 的**伴侣阵**.

定义 2　下列准对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix} \qquad ②$$

其中，$\boldsymbol{A}_i$ 分别是数域 P 上某些多项式 $d_i(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 的伴侣阵，且满足 $d_1(\lambda)|d_2(\lambda)|\cdots|d_s(\lambda)$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 P 上一个**有理标准形矩阵**.

3. 引理 1 式②中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不变因子为 $1,1,\cdots,1,d_1(\lambda)$，$d_2(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$，其中 1 的个数等于 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$ 的次数之和 n 减去 s.

定理 5 数域 P 上 $n\times n$ 方阵 $\boldsymbol{A}$ 在 P 上相似于唯一的一个有理标准形，称为 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形.

定理 6 设 $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间的线性变换，则在 V 中存在一组基，使 $\mathscr{A}$ 在该基下的矩阵是有理标准形，并且这个有理标准形由 $\mathscr{A}$ 唯一决定，称为 $\mathscr{A}$ 的有理标准形.

疑 难 解 析

1. 怎样求一个矩阵的若尔当标准形?

答 设 λ_0 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，令

$$n_0=n,\quad n_k=\text{秩}(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{E})^k\quad(k=1,2,\cdots).$$

作下表

n_0	n_1	n_2	$\cdots$	n_{k-1}	n_k	n_{k+1}	$\cdots$
	b_1	b_2	b_3	$\cdots$	b_k	b_{k+1}	$\cdots$
		a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_k	$\cdots$

其中 $b_k=n_{k-1}-n_k$，$a_k=b_k-b_{k+1}$，则：

(1) b_1 等于 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的若尔当块（也是初等因子）的个数；

(2) a_k 等于 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的 k 阶若尔当块（也是 k 次初等因子）的个数.

由此得出求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形的方法有多种，但常用初等因子法与特征多项式法.

初等因子法一般步骤如下.

第一步　对 $\lambda E - A$ 进行初等变换，求出 A 的不变因子，从而得到 A 的初等因子. 也可以由行列式因子确定 A 的初等因子.

第二步　若 A 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1}, (\lambda-\lambda_2)^{r_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，分别写出相应初等因子的若尔当块

$$J_{r_i}(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \\ & & & \lambda_i\end{bmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,s).$$

第三步　由若尔当块组成分块对角阵

$$J=\begin{bmatrix}J_{r_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{r_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{r_s}(\lambda_s)\end{bmatrix}.$$

特征多项式法一般步骤如下.

第一步　求 A 的特征多项式 $|\lambda E - A|$.

第二步　求出 A 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$.

第三步　对每个 λ_i，计算 $n_k=(A-\lambda_i E)^k$ 及 b_k, a_k $(k=1,2,\cdots)$：

$$\begin{matrix} n_0=n & & n_1 & & n_2 & \cdots & n_{k-1} & & n_k & & n_{k+1} & \cdots \\ & b_1 & & b_2 & & \cdots & & b_k & & b_{k+1} & & \cdots \\ & & a_1 & & a_2 & \cdots & & & a_k & & & \end{matrix}$$

则 a_j 即 A 的属于特征值 λ_j 的若尔当块的块数.

第四步　按第三步所确定的 a_j，写出相应的若尔当形矩阵.

2. 关于矩阵的相似，有哪些常用的结论？

答　常用结论有：

(1) 矩阵 A 与 B 相似的充分必要条件是它们的特征矩阵等价.

(2) 矩阵 **A** 与 **B** 相似

⟺**A** 与 **B** 有相同的行列式因子

⟺**A** 与 **B** 有相同的不变因子

⟺**A** 与 **B** 有相同的初等因子.

(3) 相似的矩阵有相同的秩、迹、行列式、特征值、特征多项式与最小多项式.

(4) 线性变换在不同的基下的矩阵相似.

(5) 数域 P 上两个矩阵 **A** 与 **B** 相似的充分必要条件是它们在复数域上有相同的若尔当标准形.

矩阵的相似是与数域无关的整体性质.

3. 怎样求 A 的有理标准形?

答 求 **A** 的有理标准形步骤如下:

(1) 求出 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的不变因子. 因为秩$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n$,故不变因子为 $d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_n(\lambda)$.

(2) 求对应的伴侣矩阵. 设 **A** 的不变因子为 $1,1,\cdots,1,d_1(\lambda),d_2(\lambda),\cdots,d_s(\lambda)$,其中

$$d_1(\lambda)=\lambda^{n_1}+a_{11}\lambda^{n_1-1}+\cdots+a_{1\,n_1-1}\lambda+a_{1n_1},$$

$$d_2(\lambda)=\lambda^{n_2}+a_{21}\lambda^{n_2-1}+\cdots+a_{2\,n_2-1}\lambda+a_{2n_2},$$

$$\vdots$$

$$d_s(\lambda)=\lambda^{n_s}+a_{s1}\lambda^{n_s-1}+\cdots+a_{s\,n_s-1}\lambda+a_{sn_s}.$$

对应的伴侣矩阵为

$$\boldsymbol{N}_1=\begin{bmatrix}0&0&0&\cdots&0&-a_{1n_1}\\1&0&0&\cdots&0&-a_{1\,n_1-1}\\0&1&0&\cdots&0&-a_{1\,n_1-2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1&-a_{11}\end{bmatrix},\quad\cdots,$$

$$N_s=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{sn_s}\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{sn_s-1}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{sn_s-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{s1}\end{bmatrix}.$$

(3) 将 $N_1,N_2,\cdots,N_s$ 组成有理标准形

$$N=\begin{bmatrix}N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s\end{bmatrix}.$$

方法、技巧与典型例题分析

要求会求矩阵 A 的若尔当标准形和有理标准形.

例 1 求下列复系数矩阵的若尔当标准形：

(1) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & -2 & -1\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}3 & 0 & 8\\ 3 & -1 & 6\\ -2 & 0 & -5\end{bmatrix}$；　(4) $\begin{bmatrix}4 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix}3 & 7 & -3\\ -2 & -5 & 2\\ -4 & -10 & 3\end{bmatrix}$；　(6) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{bmatrix}$；

(7) $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{bmatrix}$；　(8) $\begin{bmatrix}-4 & 2 & 10\\ -4 & 3 & 7\\ -3 & 1 & 7\end{bmatrix}$；

(9) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{bmatrix}$; (10) $\begin{bmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{bmatrix}$;

(11) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$; (12) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

解 以 A 记题中各矩阵.

(1) $$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda^2-1)(\lambda-2) \end{bmatrix},$$

得 A 的初等因子是 $\lambda-1,\lambda+1,\lambda-2$. 故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) $$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-13 & -16 & -16 \\ 5 & \lambda+7 & 6 \\ 6 & 8 & \lambda+7 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^2(\lambda+3) \end{bmatrix},$$

得 A 的初等因子是 $(\lambda-1)^2,\lambda+3$. 故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) $$\lambda E-A=\begin{bmatrix} \lambda-3 & 0 & -8 \\ -3 & \lambda+1 & -6 \\ 2 & 0 & \lambda+5 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda+1 & \\ & & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix},$$

得 A 的初等因子是 $\lambda+1,(\lambda+1)^2$. 故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(4) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-4 & -5 & 2\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^3\end{bmatrix}$,

得 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是$(\lambda-1)^3$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(5) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -7 & 3\\ 2 & \lambda+5 & 2\\ 4 & 10 & \lambda-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda^2+1)\end{bmatrix}$,

得 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是$\lambda-1,\lambda-\mathrm{i},\lambda+\mathrm{i}$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{i} & 0\\ 0 & 0 & -\mathrm{i}\end{bmatrix}.$$

(6) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 1 & -2\\ -3 & \lambda+3 & -6\\ -2 & 2 & \lambda-4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda(\lambda-2)\end{bmatrix}$,

得 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是$\lambda,\lambda,\lambda-2$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

(7) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -1 & 1\\ 3 & \lambda+3 & -3\\ 2 & 2 & \lambda-2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda^2\end{bmatrix}$,

得 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是λ,λ^2. 故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

(8) $\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda+4 & -2 & -10\\ 4 & \lambda-3 & -7\\ 3 & -1 & \lambda-7\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-2)^3\end{bmatrix}$,

得 A 的初等因子是$(\lambda-2)^3$. 故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

(9) $\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda & -3 & -3\\ 1 & \lambda-8 & -6\\ -2 & 14 & \lambda+10\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$,

得 A 的初等因子是$\lambda(\lambda+1)^2$. 故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

(10) $\lambda E-A=\begin{bmatrix}\lambda-8 & -30 & 14\\ 6 & \lambda+19 & -9\\ 6 & 23 & \lambda-11\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \lambda^3+30\lambda-8\end{bmatrix}$,

解 $\lambda^3+30\lambda-8=0$,得

$$\lambda_1=\sqrt[3]{4+\sqrt{1016}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{1016}},$$

$$\lambda_2=\omega\sqrt[3]{4+\sqrt{1016}}+\omega^2\sqrt[3]{4-\sqrt{1016}},$$

$$\lambda_3=\omega^2\sqrt[3]{4+\sqrt{1016}}+\omega^3\sqrt[3]{4-\sqrt{1016}},$$

其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则 A 的初等因子是$(\lambda-\lambda_1)$,$(\lambda-\lambda_2)$,$(\lambda-\lambda_3)$. 故 A 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}.$$

$$(11)\ \lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & 0 & 0\\ 4 & \lambda+1 & 0 & 0\\ -7 & -1 & \lambda-2 & -1\\ 7 & 6 & 1 & \lambda\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & (\lambda-1)^4\end{bmatrix},$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是 $(\lambda-1)^4$. 故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

$$(12)\ \lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda-1 & 3 & 0 & -3\\ 2 & \lambda-6 & 0 & -13\\ 0 & 3 & \lambda-1 & -3\\ 1 & 4 & 0 & \lambda-8\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \lambda-1 & \\ & & & (\lambda-1)(\lambda^2-14\lambda+19)\end{bmatrix},$$

得 $\boldsymbol{A}$ 的初等因子是 $(\lambda-1)$, $(\lambda-1)(\lambda^2-14\lambda+19)$, 故 $\boldsymbol{A}$ 的若尔当标准形为

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7+\sqrt{30} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 7-\sqrt{30}\end{bmatrix}.$$

例 2 将例 1 中各题看成有理数域上矩阵，写出它们的有理

标准形.

解 利用例1结果,求出 A 的非常数不变因子,即可写出有理标准形.

(1) A 的非常数不变因子为 $d_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2$,故 A 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

(2) A 的非常数不变因子为 $d_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+3)=\lambda^3+\lambda^2-6\lambda+3$,故 A 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & -3\\ 1 & 0 & 6\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

(3) A 的非常数不变因子为 $d_2(\lambda)=\lambda+1, d_3(\lambda)=(\lambda+1)^2=\lambda^2+2\lambda+1$,故 A 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}.$$

(4) A 的非常数不变因子为 $d_3(\lambda)=(\lambda-1)^3=\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1$,故 A 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}.$$

(5) A 的非常数不变因子为 $d_3(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda^2+1)=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1$,故 A 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

(6) A 的非常数不变因子为 $d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-2)=\lambda^2-$

2λ，故 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(7) $\boldsymbol{A}$ 的非常数不变因子为 $d_2(\lambda)=\lambda, d_3(\lambda)=\lambda^2$，故 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(8) $\boldsymbol{A}$ 的非常数不变因子为 $d_3(\lambda)=(\lambda-2)^3=\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8$，故 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(9) $\boldsymbol{A}$ 的非常数不变因子为 $d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda$，故 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(10) $\boldsymbol{A}$ 的非常数不变因子为 $d_3(\lambda)=\lambda^3+30\lambda-8$，故 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -30 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(11) $\boldsymbol{A}$ 的非常数不变因子为 $d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-4\lambda+1$，故 $\boldsymbol{A}$ 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(12) **A** 的非常数不变因子为 $d_3(\lambda)=\lambda-1$，$d_4(\lambda)=(\lambda-1)\times(\lambda^2-14\lambda+19)=\lambda^3-15\lambda^2+33\lambda-19$，故 **A** 的有理标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -33 \\ 0 & 0 & 1 & 15 \end{bmatrix}.$$

例 3 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，

(1) 若 $\mathscr{A}$ 在 V 的某基下的矩阵 **A** 是某多项式的伴侣阵，则 $\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $d(\lambda)$；

(2) 设 $\mathscr{A}$ 的最高次的不变因子是 $d(\lambda)$，则 $\mathscr{A}$ 的最小多项式是 $d(\lambda)$.

证 (1) 设 $d(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$，则

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix},$$

知 **A** 的不变因子为 $\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1个},d(\lambda)$. 有

$$d(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$
$$(r_1+r_2+\cdots+r_s=n,\lambda_i\neq\lambda_j\quad(i\neq j))$$

故 **A** 的初等因子为 $(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$，得 **A** 的若尔当标准形为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_1 & & & \\ & \boldsymbol{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s \end{bmatrix}$，其中

$$\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}_{r_i\times r_i}\qquad(i=1,2,\cdots,s).$$

因为相似矩形有相同的最小多项式，所以可以得 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式为 $d(\lambda)$，于是 $\mathscr{A}$ 的最小多项式为 $d(\lambda)$.

(2) $\mathscr{A}$ 的最高次不变因子即 $\mathscr{A}$ 的第 n 个不变因子 $d_n(\lambda)$，于是 $d(\lambda)=d_n(\lambda)$. 又有 $d_i(\lambda)\mid d_n(\lambda)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$，则由非常数不变因子可以得到 $\mathscr{A}$ 在 V 的某组基下的有理标准形，利用题(1)的结果以及第七章关于准对角矩阵最小多项式的结论可知，$\mathscr{A}$ 的最小多项式为 $d_n(\lambda)$，从而得出 $\mathscr{A}$ 的最高次不变因子 $d(\lambda)$ 即 $\mathscr{A}$ 的最小多项式.

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$ 的若尔当标准形.

解 因

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0\end{bmatrix},$$

故 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值全为零. 又秩$(\boldsymbol{A}^2)=n-2$，所以 $\boldsymbol{A}^2$ 仅有两个属于特征值零的若尔当块.

由 $\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{O},\boldsymbol{A}^{n-1}\neq\boldsymbol{O}$ 知，当 n 为奇数时，$(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n-1}{2}}\neq\boldsymbol{O},(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n-1}{2}+1}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^2$ 的最小多项式为 $\lambda^{\frac{n-1}{2}}$，$\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda^{\frac{n-1}{2}},\lambda^{\frac{n-1}{2}+1}$；当 n 为偶数时，$(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n}{2}-1}\neq\boldsymbol{O},(\boldsymbol{A}^2)^{\frac{n}{2}}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}^2$ 的最小多项式为 $\lambda^{\frac{n}{2}}$，$\boldsymbol{A}$ 的初等因子为 $\lambda^{\frac{n}{2}},\lambda^{\frac{n}{2}}$. 由此得出

(1)当 n 为奇数时，$\boldsymbol{A}^2$ 的若尔当标准形为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_{\frac{n-1}{2}} & \\ & \boldsymbol{J}_{\frac{n+1}{2}}\end{bmatrix}.$$

(2)当 n 为偶数时，$\boldsymbol{A}^2$ 的若尔当标准形为

$$J=\begin{bmatrix} J_{\frac{n}{2}} & \\ & J_{\frac{n}{2}} \end{bmatrix}.$$

例 5 当 a,b,c 取何值时，矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & a & 1 \\ b & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 与 \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & c \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

相似？

解 若 A 与 B 相似，则它们的特征多项式相同，算得

$$|\lambda E-A|=\lambda^3-(5+a)\lambda^2+(5a+2b+15)\lambda-(2a+5)(b+2),$$

$$|\lambda E-B|=\lambda^3-3\lambda^2+(4-c)\lambda-(2-c),$$

比较对应系数，得 $a=-2,b=-1,c=1$. 于是

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

且 $$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-1)^3.$$

又 $$秩(A-E)=2, \quad 秩(B-E)=2,$$

从而得 A 与 B 的若尔当标准形均为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

第九章　欧几里得空间

通过欧几里得空间，可以引入度量的概念，使得空间除线性运算外还具有内积运算，使之更接近于几何空间.

第一节　定义与基本性质

主要内容

1. 定义 1　设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上一线性空间，在 V 上定义了一个二元实函数，称为内积，记为 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. 内积具有以下性质：

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$；

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$；

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0$，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

这里 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 中任意的向量，k 是任意实数. 这样的线性空间 V 称为**欧几里得空间**（简称欧氏空间）.

欧氏空间的基本性质：

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=(k\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

(3) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})$.

2. 定义 2　非负实数 $\sqrt{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})}$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度，记为 $|\boldsymbol{\alpha}|$.

$$|k\boldsymbol{\alpha}|=|k|\,|\boldsymbol{\alpha}|.$$

长度为 1 的向量称为**单位向量**. $\dfrac{1}{|\boldsymbol{\alpha}|}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个单位向量.

向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 有表示式 $\cos\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|}$.

柯西-布涅柯夫斯基(Cauchy-Буняковский)不等式：对于任意的向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，有

$$|(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|,$$

当且仅当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关时，等号才成立.

3. 定义3 非零向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的**夹角** $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$ 规定为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|},\quad 0\leqslant\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle\leqslant\pi.$$

定义4 若向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积为零，即 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **正交或互相垂直**，记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$.

成立三角不等式

$$|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|+|\boldsymbol{\beta}|.$$

当 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交时，成立 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2=|\boldsymbol{\alpha}|^2+|\boldsymbol{\beta}|^2$.

若向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 两两正交，则成立

$$|\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\boldsymbol{\alpha}_n|^2=|\boldsymbol{\alpha}_1|^2+|\boldsymbol{\alpha}_2|^2+\cdots+|\boldsymbol{\alpha}_n|^2.$$

4. 设 V 是 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，对 V 中任意两个向量

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$
$$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+y_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)x_iy_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}.$$

其中 $a_{ij}=(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)$，$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$\boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$. $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{nn}$ 称为基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的**度量矩阵**.

不同基的度量矩阵是合同的.

对非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$，若有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0$，则知度量矩阵是正定的.

疑 难 解 析

为什么要引入欧氏空间？

答 由于在线性空间中，向量之间只定义了线性运算，不能反

映几何空间中向量的度量性质，如长度、夹角等.因此，在线性空间中引入内积的概念，用向量的内积来表示向量的长度与夹角等度量性质，对于利用线性空间模型来处理实际问题是十分有益与重要的.引入了内积运算的线性空间就是欧氏空间.

对于代数学中的欧几里得空间，读者要注意与泛函分析中内积空间、希尔伯特空间的联系与区别.

方法、技巧与典型例题分析

要求熟悉欧氏空间的概念，了解内积及其性质，能据此讨论关于欧氏空间与内积的一些问题.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是一个 n 阶正定矩阵，而

$$\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \boldsymbol{\beta}=(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

在 $\mathbf{R}^n$ 中定义内积$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}'$.

(1) 证明在这个定义之下，$\mathbf{R}^n$ 成为一欧氏空间.

(2) 求单位向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0),\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)$的度量矩阵.

(3) 具体写出这个空间中的柯西-布涅可夫斯基不等式.

解 (1) 因为在 $\mathbf{R}^n$ 中，有：

(i) 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，所以 $\boldsymbol{A}$ 是实对称的，$\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}'=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})'=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{\alpha}'=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}'=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$；

(ii) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(k\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}'=k(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}')=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

(iii) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}'=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}'+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}'=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$；

(iv) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}'=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，而 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\geqslant 0$. 故当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 时，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$.

从而，$\mathbf{R}^n$ 为一欧氏空间.

(2) 设所求度量矩阵为 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$b_{ij}=(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{\varepsilon}_i\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_j'=a_{ij}.$$

所以，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$.

(3) $$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j;$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j;$$

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}' = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i y_j.$$

所以，在 $\mathbf{R}^n$ 中，柯西-布涅可夫斯基不等式为

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i y_j}.$$

例 2 在 $\mathbf{R}^4$ 中，求 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间夹角 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$（内积按通常定义），设

(1) $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,3,2)$，$\boldsymbol{\beta}=(1,2,-2,1)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,1,5,1)$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1,2)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,1,-1,0)$.

解 利用公式 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\dfrac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\beta}|}$ 求得.

(1) $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{18}$，$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{10}$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，故

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

(2) $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{18}$，$|\boldsymbol{\beta}|=6$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=18$，故

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{18}{6\sqrt{18}}=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

(3) $|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{7}$，$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{11}$，$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=3$，故

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle=\arccos\frac{3}{\sqrt{7}\,\sqrt{11}}=\arccos\frac{3}{\sqrt{77}}.$$

例 3 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$ 通常称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离，证明：

$$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\leqslant d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$$

证 依据三角不等式

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}|=|(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|+|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}|$$

即 $$d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})\leqslant d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}).$$

例 4 在 $\mathbf{R}^4$ 中,求一单位向量与 $(1,1,-1,1)$,$(1,-1,-1,1)$,$(2,1,1,3)$ 正交.

解 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 与题给三个向量正交,则有

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-x_3+x_4=0, \\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0. \end{cases}$$

解此齐次线性方程组得

$$x_1=-\frac{4}{3}x_4,\quad x_2=0,\quad x_3=-\frac{1}{3}x_4,\quad x_4=x_4,$$

得解向量 $\boldsymbol{\alpha}=(4,0,1,-3)$.单位化得所求单位向量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{\sqrt{26}}(4,0,1,-3).$$

例 5 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 V 的一组基,证明:

(1) 若 $\boldsymbol{\gamma}\in V$,使 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)=0\ (i=1,2,\cdots,n)$,则 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2\in V$,使对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 有 $(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})$,则 $\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}_2$.

证 (1) 设 $\boldsymbol{\gamma}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n$,则由 $(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)=0$ 知

$$(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})=\left(\boldsymbol{\gamma},\sum_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\alpha}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}_i)=0,$$

故 $\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$.

(2) 由题设,$\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$,$(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})$,则当取 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2$ 时,由 $(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\alpha})=0$ 知

$$(\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2)=0\Rightarrow\boldsymbol{\gamma}_1-\boldsymbol{\gamma}_2=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{\gamma}_1=\boldsymbol{\gamma}_2.$$

例 6 在欧氏空间 V 中,求向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,\cdots,1)$ 与每一向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=(0,\cdots,0,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0)\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的夹角.

解 因为

$$\cos\varphi_i=\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{|\boldsymbol{\alpha}|\,|\boldsymbol{\varepsilon}_i|}=\frac{1}{\sqrt{n}\times 1}=\frac{1}{\sqrt{n}},$$

所以 $\varphi_i=\arccos(1/\sqrt{n})$.

例 7 证明:对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}.$$

证 设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,假设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$. 令 $a_i=0$ 时,$b_i=1$;$a_i\neq0$ 时,$b_i=a_i/|a_i|$. 由于 V 是欧氏空间,故有

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})^2\leqslant(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}),$$

而
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,$$

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,\quad(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=1^2+1^2+\cdots+1^2=n.$$

即
$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right)^2\leqslant n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2),$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}.$$

例 8 证明:在一个欧氏空间里,对于任意向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$,下列等式成立:

(1) $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=2|\boldsymbol{\alpha}|^2+2|\boldsymbol{\beta}|^2$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2-\frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2$.

证 (1) 由内积的定义可得

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2\\&=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\&=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\\&=2|\boldsymbol{\alpha}|^2+2|\boldsymbol{\beta}|^2.\end{aligned}$$

(2) $\frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}|^2-\frac{1}{4}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2=\frac{1}{4}[4(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})]=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

例 9 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是欧氏空间 V 的一个非零向量,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\in V$,满足条件

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})>0,(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\leqslant0\quad(i,j=1,2,\cdots,m,i\neq j),$$

证明:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证 设 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}$, $k_1,k_2,\cdots,k_r\geqslant 0$, k_{r+1}, $k_{r+2},\cdots,k_m\leqslant 0\ (1\leqslant r\leqslant m)$, 并令

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=-k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}-k_{r+2}\boldsymbol{\alpha}_{r+2}-\cdots-k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

则$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,-k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}-k_{r+2}\boldsymbol{\alpha}_{r+2}+\cdots-k_m\boldsymbol{\alpha}_m)$

$$=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}k_i(-k_j)(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j).$$

由题设与假定条件知, $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\leqslant 0$. 又由内积定义知, $(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})\geqslant 0$, 从而得$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0$, 即 $\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$. 故

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0},$$

$$k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{\alpha}_{r+2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0}.$$

于是
$$\begin{aligned}\mathbf{0}&=(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha})\\&=k_1(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha})+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_r(\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\alpha}),\\\mathbf{0}&=(k_{r+1}\boldsymbol{\alpha}_{r+1}+k_{r+2}\boldsymbol{\alpha}_{r+2}+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha})\\&=k_{r+1}(\boldsymbol{\alpha}_{r+1},\boldsymbol{\alpha})+k_{r+2}(\boldsymbol{\alpha}_{r+2},\boldsymbol{\alpha})+\cdots+k_m(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}).\end{aligned}$$

所以$k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})\geqslant 0\ (1\leqslant i\leqslant r)$, $k_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha})\leqslant 0\ (r+1\leqslant j\leqslant m)$.
综合知 $k_i(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha})=0\ (1\leqslant i\leqslant r)$, $k_j(\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{\alpha})=0\ (r+1\leqslant j\leqslant m)$,
即有 $k_i=0\ (i=1,2,\cdots,m)$. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

第二节 标准正交基 同构

主 要 内 容

1. 定义 1 欧氏空间 V 中一组非零的向量, 如果它们两两正交, 就称为一**正交向量组**.

正交向量组是线性无关的.

2. 定义 2 在 n 维欧氏空间中, 由 n 个向量组成的正交向量组称为**正交基**, 由单位向量组成的正交基称为**标准正交基**.

在标准正交基下, 向量的坐标可以通过内积表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\varepsilon}_1+(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+(\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\varepsilon}_n. \quad ①$$

若 $$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$
$$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+y_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$
则 $$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y}. \quad ②$$

定理 1 n 维欧氏空间中任一正交向量组都能扩充成一组正交基.

定理 2 对于 n 维欧氏空间中的任意一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，都可以找到一组标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$，使

$$L(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=L(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_i) \quad (i=1,2,\cdots,n). \quad ③$$

由基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵是上三角形的.

3. 定义 3 如果 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 n 阶实数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为正交矩阵.

由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵；反之，若第一组基是标准正交基，且过渡矩阵是正交矩阵，则第二组基也一定是标准正交基.

4. 定义 4 设 V 与 V' 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的两个欧氏空间，如果存在由 V 到 V' 的一个双射 σ，满足

(1) $\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta})$，(2) $\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$，

(3) $(\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，

式中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k\in\mathbf{R}$，则映射 σ 称为 V 到 V' 的**同构映射**，称 V 与 V' **同构**.

每个 n 维欧氏空间都与 $\mathbf{R}^n$ 同构. 同构的欧氏空间有相同的维数.

同构的欧氏空间具有反身性、对称性与传递性.

定理 3 两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们的维数相同.

疑 难 解 析

1. 试简述施密特(Schimidt)正交化方法.

答 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是欧氏空间 V 的一组线性无关的向量.

(1) 取 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$，则 $\boldsymbol{\beta}_1$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 的线性组合，且 $\boldsymbol{\beta}_1\neq\mathbf{0}$.

(2) 取 $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$，则 β_2 是 α_1,α_2 的线性组合，因 α_1，α_2 线性无关，所以 $\beta_2\neq\mathbf{0}$. 又由

$$(\beta_2,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_1)-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}(\beta_1,\beta_1)=0,$$

知 β_2,β_1 正交.

(3) 当 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{k-1}$ 作出后，取

$$\beta_k=\alpha_k-\frac{(\alpha_k,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\cdots-\frac{(\alpha_k,\beta_{k-1})}{(\beta_{k-1},\beta_{k-1})}\beta_{k-1},$$

则 β_k 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 的线性组合. 由

$$(\beta_k,\beta_i)=(\alpha_k,\beta_i)-\frac{(\alpha_k,\beta_i)}{(\beta_i,\beta_i)}(\beta_i,\beta_i)=0\quad(i=1,2,\cdots,k-1)$$

知 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 两两正交.

(4) 若令 $\gamma_i=\beta_i/|\beta_i|\quad(i=1,2,\cdots,n)$，则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n$ 是 V 的一个标准正交基.

2. 怎样用初等变换法求标准正交基?

答 除了施密特正交化方法外，还可以用初等变换法求 n 维欧氏空间 V 的标准正交基.

(1) 任取 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，求出这组基的度量矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}$ 是一个正交矩阵.

(2) 用初等变换求得可逆阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$.

(3) 以 $\boldsymbol{C}$ 为过渡矩阵，则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 得到一组新基 β_1，$\beta_2,\cdots,\beta_n$，有

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\boldsymbol{C}.$$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的度量矩阵等于 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{E}$，所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的一组标准正交基.

方法、技巧与典型例题分析

掌握并熟练求标准正交基的方法是本节的首要要求.

例 1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad -x_3+x_4=0, \\ \quad x_2 \quad\quad -x_4 \ =0 \end{cases}$$

解空间的标准正交基，并求与解空间中向量正交的向量.

解 因为方程组的基础解系是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0), \quad \boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,0,-1),$$

所以，施密特正交化得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0), \quad \boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}(1,-2,-1,-2).$$

单位化得 $\boldsymbol{\gamma}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0), \boldsymbol{\gamma}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,-1,-2)$.

$\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2$ 是解空间的标准正交基.

由 $\boldsymbol{\alpha}$ 与解空间中每个向量都正交 $\Longleftrightarrow \boldsymbol{\alpha}$ 与解空间中每个基向量都正交. 故设 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1, x_2, x_3, x_4)$，由 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}_2)=0$ 得方程组

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +x_3 \quad\quad =0, \\ x_1-x_2 \quad\quad -x_4=0. \end{cases}$$

求得基础解系 $(1,1,-1,0),(0,1,0,-1)$. 因此，与解空间中每个向量都正交的向量是

$$k_1(1,1,-1,0)+k_2(0,1,0,-1), \quad k_1, k_2 \in \mathbf{R}.$$

例 2 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是三维欧氏空间的一组标准正交基，证明：

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3), \quad \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3),$$

$$\boldsymbol{\alpha}_3=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)$$

也是一组标准正交基.

证 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=\frac{1}{9}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3, 2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\frac{1}{9}(4-2-2)=0,$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=\frac{1}{9}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1+2\boldsymbol{\varepsilon}_2-\boldsymbol{\varepsilon}_3, \boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\frac{1}{9}(2-4+2)=0,$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\frac{1}{9}(2\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)=\frac{1}{9}(2+2-4)=0,$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)=1,$$

所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也是一组标准正交基.

例 3 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4,\boldsymbol{\varepsilon}_5$ 是五维欧氏空间 V 的一组标准正交基，$V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4$，$\boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$，求 V_1 的一组标准正交基.

解 显然，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，所以它是 V_1 的一组基. 用施密特正交化方法：

令
$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

$$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4-\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_5,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_5,$$

再单位化，得

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2),\quad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_4-\boldsymbol{\varepsilon}_5),$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3-\boldsymbol{\varepsilon}_5),$$

则 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 即为 V_1 的一组标准正交基.

例 4 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3\qquad\;+\;x_5\;=0\end{cases}$$

的解空间(作为 $\mathbf{R}^5$ 的子空间)的一组标准正交基.

解 由 $\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}\neq 0$ 知，线性方程组系数矩阵的秩为 2，有三个自由未知量. 取 x_3,x_4,x_5 作自由未知量，可求得基础解系：

$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,1,0,0)$，　$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,1,0,1,0)$，　$\boldsymbol{\alpha}_3=(4,-5,0,0,1)$

是解空间的一组基.

对 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$，先正交化，再单位化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{2}(-2,1,-1,2,0),$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_2)}{(\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_2)}\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{5}(7,-6,6,13,5).$$

又 $$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0),\quad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2,0),$$

$$\boldsymbol{\eta}_3=\frac{1}{\sqrt{315}}(7,-6,6,13,5).$$

$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 即为齐次线性方程组解空间的一组标准正交基.

例 5 在 $\mathbf{R}[x]_4$ 中定义内积为 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$，求 $\mathbf{R}[x]_4$ 的一组标准正交基(由基 $1,x,x^2,x^3$ 出发作正交化).

解 由所定义内积，得

$$(x,1)=0,\quad (1,1)=2(x^2,1)=(x,x)=\frac{2}{3},$$

$$(x^2,x)=0,\quad (x^3,0)=0,\quad (x^3,1)=\frac{2}{4}.$$

对基 $1,x,x^2,x^3$ 正交化，令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=1,\quad \boldsymbol{\beta}_2=x-\frac{(x,1)}{(1,1)}1=x,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=x^2-\frac{(x^2,1)}{(1,1)}1-\frac{(x^2,x)}{(x,x)}x=x^2-\frac{1}{3},$$

$$\boldsymbol{\beta}_4=x^3-\frac{(x^3,1)}{(1,1)}1-\frac{(x^3,x)}{(x,x)}x-\frac{\left(x^3,x^2-\frac{1}{3}\right)}{\left(x^2-\frac{1}{3},x^2-\frac{1}{3}\right)}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$=x^3-\frac{3}{5}x,$$

再单位化，得一组标准正交基

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x,\quad \boldsymbol{\eta}_3=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1),$$

$$\boldsymbol{\eta}_4=\frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3-3x).$$

例 6 设 V 是一 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 是 V 中一固定向量，证明：

(1)$V_1=\{\boldsymbol{x}\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha})=0,\boldsymbol{x}\in V\}$ 是 V 的一个子空间；

(2)V_1 的维数等于 $n-1$.

证 (1) 因为 $(\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha})=0$，所以 $\mathbf{0}\in V_1$，V_1 非空.

$\forall\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1$，有 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha})=0$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})=0$，所以

$$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha})=0,\quad (k\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha})=0,$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,k\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1$，所以 V_1 为一个子空间.

(2) 因为 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，故可扩充成 V 的一组正交基：$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，从而 $\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 都属于 V_1，故 V_1 至少为 $n-1$ 维. 又由 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，知 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})>0$，故 $\boldsymbol{\alpha}\notin V_1$，即 $V_1\neq V$，所以 V 必为 $n-1$ 维空间.

例 7 (1) 证明：欧氏空间中不同基的度量空间是合同的；

(2) 利用上述结果证明，任一欧氏空间都存在标准正交基.

证 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 分别是欧氏空间 V 的两组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的度量矩阵，并设

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{C}=(c_{ij}).$$

(1) 因为 $\boldsymbol{\beta}_i=c_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+c_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+c_{ni}\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，所以

$$\begin{aligned}b_{ij}&=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_i)=\Big(\sum_{s=1}^{n}c_{si}\boldsymbol{\alpha}_s,\sum_{t=1}^{n}c_{tj}\boldsymbol{\alpha}_t\Big)=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}c_{si}c_{tj}(\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\alpha}_t)\\&=(c_{1i},c_{2i},\cdots,c_{ni})\boldsymbol{A}(c_{1j},c_{2j},\cdots,c_{nj})'.\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$，不同基的度量矩阵是合同的.

(2) 在 V 中任取一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，设其度量矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，其中 $a_{ij}=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是正定的，而正定矩阵与单位矩阵合同，故存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$. 令

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{C},$$

则由题(1)可知，基 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 的度量矩阵为 $\boldsymbol{E}$，即知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是所求的标准正交基.

例 8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中一组向量，而

$$\boldsymbol{\Delta}=\begin{bmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_m)\\(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_m)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\(\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_1) & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_2) & \cdots & (\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_m)\end{bmatrix}.$$

证明：当且仅当 $|\boldsymbol{\Delta}|\neq 0$ 时 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

证 当 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关时，可扩充为 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，则由于基的度量矩阵是正定的，所以其 m 阶顺序主子式 $|\boldsymbol{\Delta}|>0$，即 $|\boldsymbol{\Delta}|\neq 0$.

当 $|\boldsymbol{\Delta}|\neq 0$ 时，必有 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关. 因否则，其中必有一向量可由其余向量线性表示. 若设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由其余向量线性表示，则相应地 $|\boldsymbol{\Delta}|$ 中第 1 列可由其余列线性表示，依行列式性质知，$|\boldsymbol{\Delta}|=0$，与假设矛盾，故必 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关.

例 9 在三维欧氏空间中，内积按普通数积定义，设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,1)$，求：

(1) 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为基的度量矩阵；

(2) 用两种方法求 V 的标准正交基.

解 (1) 因为 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=1$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1)=1$，$(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2)=(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1)=1$，$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2)=2$，$(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3)=3$. 所以，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的度量矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

(2) 用初等变换法.

因为存在可逆阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad 使 \quad \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

所以，有 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{C}$. 于是，得

$$\begin{cases}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,0),\\ \boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1).\end{cases}$$

$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是标准正交基(易知 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是单位向量).

用施密特正交化方法.

令
$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1)}{(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)}\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,1,0)-(1,0,0)=(0,1,0),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_1)}{(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)}\boldsymbol{\varepsilon}_1-\frac{(\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_2)}{(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2)}\boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,1,1)-(1,0,0)-(0,1,0)$$
$$=(0,0,1).$$

因为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是单位向量,所以是标准正交基.

第三节　正交变换　子空间

主要内容

1. 定义 1　设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的线性变换,如果它保持向量的内积不变,即对于任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,都有 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,则称 $\mathscr{A}$ 是**正交变换**.

2. 定理 1　设 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换,则下面四个命题相互等价:

(1) $\mathscr{A}$ 是正交变换;

(2) $\mathscr{A}$ 保持向量的长度不变,即对于 $\boldsymbol{\alpha}\in V$, $|\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})|=|\boldsymbol{\alpha}|$;

(3) 若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是标准正交基,则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 也是标准正交基;

(4) $\mathscr{A}$ 在任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵.

3. 定义 2　设 V_1,V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间.若对于任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V_1,\boldsymbol{\beta}\in V_2$,恒有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$,则称 V_1,V_2 为**正交的**,记为 V_1

$\perp V_2$. 一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，如果对于任意的 $\boldsymbol{\beta}\in V_1$，恒有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ **与子空间 V_1 正交**，记为 $\boldsymbol{\alpha}\perp V_1$.

定理 2 如果子空间 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 两两正交，则和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 是直和.

4. 定义 3 子空间 V_2 称为子空间 V_1 的一个**正交补**，如果 $V_1\perp V_2$ 且 $V_1+V_2=V$.

定理 3 n 维欧氏空间 V 的每一个子空间 V_1 都有唯一的正交补.

V_1 的正交补记为 $V_1^{\perp}$，且有维(V_1)+维$(V_1^{\perp})=n$.

推论 $V_1^{\perp}$ 恰由所有与 V_1 正交的向量组成.

V 中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都可唯一地分解为 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1^{\perp}$，称 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在子空间 V_1 上的**内射影**.

疑 难 解 析

1. 怎样理解正交变换?

答 正交变换是保持向量内积不变（即 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$）的线性变换. 正交变换在 V 的任一组标准正交基下的矩阵是正交矩阵，由于正交矩阵可逆，故正交变换也可逆.

正交变换是一个欧氏空间到它自身的同构映射，所以正交变换的乘积与正交变换的逆变换还是正交变换，并且正交矩阵的乘积与正交矩阵的逆矩阵也是正交矩阵.

若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，则由 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 知 $|\boldsymbol{A}|=\pm1$. 行列式等于 1 的正交变换称为**旋转或第一类的**；行列式等于 -1 的正交变换称为**第二类的**.

2. 分解式 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ 的意义是什么?

答 若 V_1 是 n 维欧氏空间 V 的一个子空间. 则 $V=V_1+V_1^{\perp}$；对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，可以唯一地写 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\in V_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2\in V_1^{\perp}$.

式中 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在子空间 V_1 上内（正）射影. $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是与 V_1

正交的向量(也称为外射影).这种分解是唯一的.

当 V_1 是欧氏空间 V 的一个有限维子空间时,$\boldsymbol{\alpha}$ 在 V_1 上的内射影 $\boldsymbol{\alpha}_1$,对 V_1 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}_1'$,有 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1|<|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}_1'|$.因此,将向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在子空间 V_1 上的内射影称为 V_1 到 $\boldsymbol{\alpha}$ 的最佳逼近.

方法、技巧与典型例题分析

正交变换是一个重要的概念,读者必须熟悉正交变换及其等价命题,能够由正交变换出发讨论有关命题.

例 1 证明:两个正交变换的乘积仍是正交变换,一个正交变换的逆变换还是正交变换.

证 设 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 是正交变换,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为标准正交基,$\mathscr{A}_1$,$\mathscr{A}_2$ 在这组基上的表示矩阵分别是 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$,则 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ 在这组基上的表示矩阵是 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$.因为 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2$ 是正交矩阵,所以其乘积 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2$ 也是正交矩阵,从而 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ 是正交变换.

因为 $\mathscr{A}^{-1}$在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 上的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$,由于正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆仍是正交矩阵,故 $\mathscr{A}^{-1}$还是正交变换.

证二 因为 $\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2$ 是 V 中两个正交变换,故 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ 也是 V 的线性变换.于是 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,有

$$
\begin{aligned}
((\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2)\boldsymbol{\alpha},(\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2)\boldsymbol{\beta})&=(\mathscr{A}_1(\mathscr{A}_2\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}_1(\mathscr{A}_2\boldsymbol{\beta}))\\
&=(\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),
\end{aligned}
$$

得知 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ 保持向量的内积不变,故 $\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2$ 是正交变换.

例 2 证明:上三角的正交矩阵必为对角矩阵,且对角线上的元素为+1 或-1.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 是一个上三角矩阵,且为正交矩阵,则 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}^{-1}$.但上三角矩阵的转置是下三角矩阵,而上三角矩阵的逆仍是上三角矩阵,故 $\boldsymbol{A}'$必为对角矩阵,从而 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵.设

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix}$$

则由 $AA'=E$,得 $a_i^2=1\ (i=1,2,\cdots,n)$. 从而,$a_i=\pm 1$,即 A 的对角线上元素是 1 或 -1.

例 3 (1) 设 A 为一个 n 阶实矩阵,且 $|A|\neq 0$. 证明:A 可以分解成 $A=QT$,其中 Q 是正交矩阵,T 是上三角形矩阵.

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

且 $t_{ii}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 证明这个分解是唯一的.

(2) 设 A 是 n 阶正定矩阵,证明存在一上三角矩阵 T,使 $A=T'T$.

证 因为 $|A|\neq 0$,故 A 是实满秩方阵. 令 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,则列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,所以是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的一组基. 对其实行正交标准化,并设

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_1 &= t_{11}\boldsymbol{\alpha}_1, \\ \boldsymbol{\beta}_2 &= t_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+t_{22}\boldsymbol{\alpha}_2, \\ &\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_n &= t_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+t_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+t_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n, \end{aligned}$$

式中 $t_{ii}>0\ (i=1,2,\cdots,n)$,即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)T^{-1}, \qquad ①$$

式中 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基,而

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

是对角线上全是正实数的上三角矩阵，所以 T 也是这样的矩阵.

由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是标准正交基，所以以它为列的矩阵 $Q=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$是一正交矩阵，于是

由式①即 $Q=AT^{-1}$得　$A=QT$.

再证唯一性. 设又有 $A=Q_1T_1$，则

$$Q_1T_1=QT\Rightarrow Q_1^{-1}Q=T_1T^{-1}.$$

因为 Q_1,Q 是正交矩阵，故 $Q_1^{-1}Q$ 也是正交矩阵，从而 T_1T^{-1} 也是正交矩阵. 又 T_1,T 是上三角矩阵，故 T_1T^{-1} 也是上三角矩阵. 由例 2 知 T_1,T^{-1}是对角线上元素全为正的上三角矩阵，所以 $T_1T^{-1}=E$. 从而 $T_1=T,Q_1=Q$，即分解是唯一的.

(2) 设 A 是正定矩阵，则存在可逆阵 C，使 $A=C'EC=C'C$. 由题(1)知 $C=QT$，从而

$$A=(QT)'QT=T'T.$$

例 4　设 η 是欧氏空间中一单位向量，定义

$$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta.$$

证明：(1) $\mathscr{A}$ 是正交变换，这样的正交变换称为镜面反射；

(2) $\mathscr{A}$ 是第二类的；

(3) 若 n 维欧氏空间中，正交变换 $\mathscr{A}$ 以 1 作为一个特征值，且属于特征值 1 的特征子空间的维数为 $n-1$，则 $\mathscr{A}$ 为镜面反射.

证　(1) 对任意 $\alpha,\beta\in V$ 及 $k,l\in\mathbf{R}$，有

$$\mathscr{A}(k\alpha+l\beta)=k\alpha+l\beta=2(\eta,k\alpha+l\beta)\eta=k\mathscr{A}(\alpha)+l\mathscr{A}(\beta),$$

故 $\mathscr{A}$ 是一线性变换. 又

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))&=(\alpha-2(\eta,\alpha)\eta,\beta-2(\eta,\beta)\eta)\\&=(\alpha,\beta)-2(\eta,\beta)(\eta,\alpha)-2(\eta,\alpha)(\eta,\beta)\\&\quad+4(\eta,\alpha)(\eta,\beta)(\eta,\eta)\\&=(\alpha,\beta)\quad(\text{因为}(\eta,\eta)=1),\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}$ 是正交变换.

(2) 因为 η 是单位向量，故可扩为一组标准正交基 $\eta,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{\eta}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta}=-\boldsymbol{\eta}.$$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\varepsilon}_i-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon}_i)\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (i=2,3,\cdots,n).$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 上的表示矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix},$$

于是 $|\boldsymbol{A}|=-1$，得知 $\mathscr{A}$ 是第二类的.

(3) 因为 $\mathscr{A}$ 的特征值有 n 个，已知 $n-1$ 个为 1，则另一个也为实数，设为 λ_0. 则

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\begin{bmatrix}\lambda_0 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{bmatrix},$$

于是 $\quad (\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1))=\lambda_0^2(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_1)\Longrightarrow\lambda_0=\pm 1.$

因为子空间 V_1 是 $n-1$ 维的，所以 $\lambda_0=-1$. 于是，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=-\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=\boldsymbol{\varepsilon}_i$ $(i=2,3,\cdots,n)$. 因为 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则 V 中属于不同特征值的特征向量必正交，故有 $(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=0$ $(i=2,3,\cdots,n)$.

令 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\varepsilon}_1/|\boldsymbol{\varepsilon}_1|$，则 $\boldsymbol{\eta}$ 是与 $\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 正交的单位向量，有

$$(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon}_i)=0 \ (i=2,3,\cdots,n), \quad \mathscr{A}(\boldsymbol{\eta})=-\boldsymbol{\eta}.$$

下面验证，$\forall \boldsymbol{\alpha}\in V$，都有 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta}$.

因为 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\eta}+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})&=k_1\mathscr{A}(\boldsymbol{\eta})+k_2\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+k_n\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=-k_1\boldsymbol{\eta}+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\\&=k_1\boldsymbol{\eta}+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n-2k_1\boldsymbol{\eta}\\&=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta},\end{aligned}$$

所以，$\mathscr{A}$ 是镜面反射.

例 5 证明：反对称实数矩阵的特征值是零或纯虚数.

证 设 A 是一个反对称实数矩阵，λ 是 A 的一个特征值，ξ 是对应的特征向量，则有 $A(\xi)=\lambda\xi$. 于是

$$\overline{\xi}'A\xi=\overline{\xi}'(-A')\xi=-\overline{\xi}'A'\xi=-(A\overline{\xi})'\xi=-(\overline{A\xi})'\xi,$$

即有 $\lambda\overline{\xi}\xi=-\overline{\lambda}\,\overline{\xi}\xi$，得出 $\lambda=-\overline{\lambda}$.

设 $\lambda=a+\mathrm{i}b$，由 $\lambda=-\overline{\lambda}$ 得 $a+\mathrm{i}b=-(a-\mathrm{i}b)$，知 $a=0$，故 λ 或为零或为纯虚数.

例 6 求正交矩阵 T，使 $T'AT$ 成为对角阵，其中 A 为

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$； (4) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$；

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

解 求正交矩阵 T 的步骤是：先由 $|\lambda E-A|=0$ 求出特征值，然后求出对应的特征向量，再单位化，即可写出正交矩阵 T.

(1) 由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)$，得特征值 1,4,2，求得相应特征向量为

$$\alpha_1=(-2,-1,2),\ \alpha_2=(2,-2,1),\ \alpha_3=(1,2,2).$$

因为 A 实对称，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关且正交.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得标准正交基为

$$\eta_1=\frac{1}{3}(-2,-1,2),\quad \eta_2=\frac{1}{3}(2,-2,1),\quad \eta_3=\frac{1}{3}(1,2,2).$$

于是，所求正交矩阵为

$$T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ -1 & -2 & 2\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad T'AT=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 4 & \\ & & -2\end{bmatrix}.$$

(2) 由 $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$，得特征值 10,1,1，求得相应特征向量为

$$\alpha_1=(-1,-2,1),\quad \alpha_2=(-2,1,0),\quad \alpha_3=(2,0,1).$$

单位化后得正交矩阵

$$T=\begin{bmatrix}-1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/(3\sqrt{5})\\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/(3\sqrt{5})\\ 2/3 & 0 & 5/(3\sqrt{5})\end{bmatrix},\quad T'AT=\begin{bmatrix}10 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}.$$

(3) 由 $|\lambda E-A|=(\lambda-5)(\lambda+5)(\lambda-3)(\lambda+3)$，得特征值 5，−5，3，−3，求得相应特征向量为

$$\alpha_1=(1,1,1,1),\qquad \alpha_2=(1,1,-1,-1),$$
$$\alpha_3=(-1,1,-1,1),\quad \alpha_4=(1,-1,-1,1).$$

单位化后得正交矩阵

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad T'AT=\begin{bmatrix}5 & & & \\ & -5 & & \\ & & 3 & \\ & & & -3\end{bmatrix}.$$

(4) 由 $|\lambda E-A|=(\lambda-8)(\lambda+4)^3$，得特征值 8，−4，−4，−4，求得相应特征向量为

$$\alpha_1=(-1,1,-1,1),\quad \alpha_2=(1,1,0,0),$$
$$\alpha_3=(1,0,-1,0),\qquad \alpha_4=(1,0,0,1).$$

单位化后得正交矩阵

$$T=\begin{bmatrix}-1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/(2\sqrt{3})\\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/(2\sqrt{3})\\ -1/2 & 0 & 2/\sqrt{6} & 1/(2\sqrt{3})\\ 1/2 & 0 & 0 & 3/(2\sqrt{3})\end{bmatrix},$$

$$T'AT=\begin{bmatrix}8&&&\\&-4&&\\&&-4&\\&&&-4\end{bmatrix}.$$

(5) 由 $|\lambda E-A|=\lambda^3(\lambda-4)$，得特征值 4,0,0,0，求得相应特征向量为

$$\alpha_1=(1,1,1,1),\quad \alpha_2=(-1,1,0,0),$$
$$\alpha_3=(-1,0,1,0),\quad \alpha_4=(-1,0,0,1).$$

单位化后得正交矩阵

$$T=\begin{bmatrix}1/2&-1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&-\sqrt{3}/6\\1/2&2/\sqrt{2}&-1/\sqrt{6}&-\sqrt{3}/6\\1/2&0&\sqrt{2/3}&-\sqrt{3}/6\\1/2&0&0&\sqrt{3}/2\end{bmatrix},\quad T'AT=\begin{bmatrix}4&&&\\&0&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}.$$

例 7 用正交线性变换化下列二次型为标准形.

(1) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

(2) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;

(3) $2x_1x_2+2x_3x_4$;

(4) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_1x_4-4x_2x_3+6x_2x_4-2x_3x_4$.

解 先写出二次型的矩阵 A，后面的步骤同上例；在求得正交矩阵 T 后，由 $X=TY$ 得二次型的标准形 $f=Y'(T'AT)Y$.

(1) $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}$,

$$|\lambda E-A|=(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-5),$$

A 的特征值为 2,5,−1，相应的特征向量为

$$\alpha_1=(2,-1,-2),\quad \alpha_2=(1,-2,2),\quad \alpha_3=(2,2,1).$$

单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{3}\alpha_1,\quad \eta_2=\frac{1}{3}\alpha_2,\quad \eta_3=\frac{1}{3}\alpha_3.$$

求得正交矩阵 $$T=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&2\\-1&-2&2\\-2&2&1\end{bmatrix},$$

则 $$f=Y(T'AT)Y=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2.$$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{bmatrix}$, $|\lambda E-A|=(\lambda+7)(\lambda-2)^2$,

A 的特征值为$-7,2,2$,相应的特征向量为

$$\alpha_1=(1,2,-2),\quad \alpha_2=(-2,1,0),\quad \alpha_3=(2,0,1).$$

单位化后得正交矩阵

$$T=\begin{bmatrix}-2/\sqrt{5}&2/(3\sqrt{5})&1/3\\1/\sqrt{5}&4/(3\sqrt{5})&2/3\\0&5/(3\sqrt{5})&-2/3\end{bmatrix},$$

则 $$f=Y'(T'AT)Y=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2.$$

(3) $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$, $|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$,

A 的特征值为$1,1,-1,-1$,相应的特征向量为

$$\alpha_1=(1,1,0,0),\qquad \alpha_2=(0,0,1,1),$$
$$\alpha_3=(1,-1,0,0),\quad \alpha_4=(0,0,1,-1).$$

单位化得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1,\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_2,$$

$$\eta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_3,\quad \eta_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_4.$$

求得正交矩阵

$$T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\end{bmatrix},$$

则
$$f=Y'(T'AT)Y=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2.$$

（4）
$$A=\begin{bmatrix}1&-1&3&-2\\-1&1&-2&3\\3&-2&1&-1\\-2&3&-1&1\end{bmatrix},$$

$$|\lambda E-A|=(\lambda-1)(\lambda-7)(\lambda+1)(\lambda+3),$$

A 的特征值为 $1,7,-1,-3$，相应特征向量为

$$\alpha_1=(1,1,1,1),\qquad \alpha_2=(-1,1,-1,1),$$

$$\alpha_3=(-1,-1,1,1),\quad \alpha_4=(1,-1,-1,1).$$

单位化后得正交矩阵

$$T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&1&1&1\end{bmatrix},$$

则
$$f=Y'(T'AT)Y=y_1^2+7y_2^2-y_3^2-3y_4^2.$$

例 8 设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明：A 正定的充分必要条件是 A 的特征多项式的根全大于零.

证 设存在正交方阵 T，使

$$f=X'AX=Y'(T'AT)Y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2. \qquad ①$$

充分性 若 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，则对任意

$$X=TY\neq O,\Rightarrow Y\neq O,$$

故 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2>0$，从而 A 正定.

必要性 当 A 正定时，设有 $\lambda_n\leqslant 0$，则取 $Y=(0,0,\cdots,0,1)'$，有 $X=TY\neq O$. 代入式①得 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\leqslant 0$，与 A 正定矛盾，故必所有 $\lambda_i>0$.

例 9 设 A 是 n 阶实矩阵,证明:存在正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT$ 为三角矩阵的充分必要条件是 A 的特征多项式的根全是实的.

证 为方便起见,可确定三角矩阵是上三角矩阵.

充分性 设 A 的所有特征根都是实的,则存在可逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP=J$,

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{bmatrix},\quad J_i=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ 1 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_r \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,s).$$

因为 λ_i 都是实数,所以 J 是上三角实矩阵. 而由例 3 知,矩阵 P 可分解为一个正交矩阵 T 与一个上三角矩阵 S 的乘积,即 $P=TS$. 于是

$$P^{-1}AP=(TS)^{-1}A(TS)=J \Longrightarrow T^{-1}AT=SJS^{-1},$$

其中 SJS^{-1} 是上三角矩阵.

必要性 设有正交矩阵 T,使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & b_{nn} \end{bmatrix},$$

由于 A 与 $T^{-1}AT$ 相似,所以它们有相同的特征根. 而 $|\lambda E-T^{-1}AT|=(\lambda-b_{11})(\lambda-b_{22})\cdots(\lambda-b_{nn})$,所以 A 的特征多项式的根都是实的.

例 10 证明:如果 $\mathscr{A}$ 是 n 维欧氏空间的一个正交变换,则 $\mathscr{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间.

证 设 V_1 是 $\mathscr{A}$ 的不变子空间,$V_1^{\perp}$ 是 V_1 的正交补,则 $\mathscr{A}$ 也是 V_1 的一个线性变换,而且是单射变换. 又 V_1 是有限维的,所以 $\mathscr{A}$ 又是 V_1 的满射变换. 从而,对任意 $x\in V_1$,有 $y\in V_1$,使 $\mathscr{A}(y)=x$. 这样,任取 $\alpha\in V_1^{\perp}$,有 $(\alpha,y)=0$. 于是

$$(\mathscr{A}(\alpha),x)=(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(y))=(\alpha,y)=0,$$

即 $\mathscr{A}(\alpha)$ 与 V_1 中任意向量正交,故 $\mathscr{A}(\alpha)\in V_1^{\perp}$,即 $V_1^{\perp}$ 对 $\mathscr{A}$ 也不变.

例 11 证明：向量$\boldsymbol{\beta}\in V_1$是向量$\boldsymbol{\alpha}$在子空间$V_1$上的内射影的充分必要条件是，对任意的$\boldsymbol{\xi}\in V_1$，

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}|.$$

证 必要性 对任意$\boldsymbol{\xi}\in V_1$，有$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi})$，其中$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}\in V_1$，$\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi}\in V_1^{\perp}$，所以

$$(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi})=0,$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}|^2&=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi})=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi})\\&=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi})\\&=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2+|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi}|^2.\end{aligned}$$

又 $|\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\xi}|^2\geqslant0\Longrightarrow|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}|^2\geqslant|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2\Longrightarrow|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\xi}|\geqslant|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|.$

充分性 设$\boldsymbol{\beta}_1$是$\boldsymbol{\alpha}$在V_1上的内射影，由必要性证明知

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_1|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|.$$

又由题设知，$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_1|$，故

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|=|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_1|\Longrightarrow(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_1).$$

令$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\gamma}$，于是

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})&=(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})\\&=(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}_1),\end{aligned}$$

从而$(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta})=0\Longrightarrow\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\beta}$. 即$\boldsymbol{\beta}$是$\boldsymbol{\alpha}$在$V_1$上的内射影.

例 12 设V_1,V_2是欧氏空间V的两个子空间，证明：

$$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp},\quad (V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}.$$

证 (1) 设$\boldsymbol{\alpha}\in(V_1+V_2)^{\perp}$，则$\boldsymbol{\alpha}$与$V_1+V_2$中向量正交，即$\boldsymbol{\alpha}$与$V_1,V_2$中向量正交. 从而

$$\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp},\quad \boldsymbol{\alpha}\in V_2^{\perp},\quad \boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}.$$

又，设$\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$，则$\boldsymbol{\alpha}\in V_1^{\perp}$，$\boldsymbol{\alpha}\in V_2^{\perp}$，于是$\boldsymbol{\alpha}$与$V_1,V_2$中向量正交，从而与$V_1+V_2$中任意向量正交，即有

$$\boldsymbol{\alpha}\in(V_1+V_2)^{\perp}\Longrightarrow V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}\subseteq(V_1+V_2)^{\perp}.$$

故得 $$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}.$$

(2) 因为$V_1\subseteq(V_1^{\perp})^{\perp}$，又$\forall\boldsymbol{\alpha}\in(V_1^{\perp})^{\perp}$，当$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_1\in$

$V_1, \boldsymbol{\beta}_1 \in V_1^{\perp}$ 时，有

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}_1) = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_1) + (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1) \Longrightarrow (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{0}.$$

即 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1$，故$(V_1^{\perp})^{\perp} \subseteq V_1$，从而$(V_1^{\perp})^{\perp} = V_1$. 于是

$$(V_1^{\perp} + V_2^{\perp})^{\perp} = (V_1^{\perp})^{\perp} \cap (V_2^{\perp})^{\perp} = V_1 \cap V_2,$$

故 $[(V_1^{\perp} + V_2^{\perp})^{\perp}]^{\perp} = (V_1 + V_2)^{\perp} \Longrightarrow V_1^{\perp} + V_2^{\perp} = (V_1 \cap V_2)^{\perp}$.

例 13 设 V_1 是欧氏空间 V 的一个子空间，$V_1^{\perp}$ 是 V 的正交子空间. 证明：若 V_1 是有限维的，则 $V_1^{\perp}$ 是 V_1 的正交补，即 $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$.

证 若 V_1 是零空间，则结论显然成立.

若 V_1 是 m $(m>0)$维子空间，则对 V_1 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$，$\forall \boldsymbol{\beta} \in V$，令

$$\boldsymbol{\gamma} = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}_1)\boldsymbol{\varepsilon}_1 + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \cdots + (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}_m)\boldsymbol{\varepsilon}_m,$$

则 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\gamma} + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma})$，$\boldsymbol{\gamma} \in V_1$，且有

$$(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}_i) - (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}_i) - (\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = 0.$$

故知 $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma}$ 与每个 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$正交，即与 V_1 的每个向量正交，从而 $\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\gamma} \in V_1^{\perp}$. 于是 $V = V_1 + V_1^{\perp}$.

又设 $\boldsymbol{\alpha} = V_1 \cap V_1^{\perp}$，则 $\boldsymbol{\alpha} \in V_1$，$\boldsymbol{\alpha} \in V_1^{\perp}$，从而$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$，故 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，因此 $V_1 \cap V_1^{\perp} = \mathbf{0}$. 于是 $V = V_1 \oplus V_1^{\perp}$.

例 14 证明：正交矩阵的实特征根为± 1.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的实特征根，$\boldsymbol{\alpha}$ 是对应的特征向量，则 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 于是对 $\boldsymbol{A\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$ 取转置，再右乘 $\boldsymbol{A\alpha}$，得

$$\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}' = \lambda\boldsymbol{\alpha}' \Longrightarrow \overline{\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}'}\boldsymbol{A\alpha} = \overline{\lambda\boldsymbol{\alpha}'} \cdot \lambda\boldsymbol{\alpha} \Longrightarrow \lambda^2\, \overline{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha} = \overline{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha}.$$

因为$\overline{\boldsymbol{\alpha}'}\boldsymbol{\alpha} > 0$，所以 $\lambda^2 = 1$，故有 $\lambda = \pm 1$.

例 15 证明：奇数维欧氏空间中的旋转一定以 1 作为它的一个特征值.

证 设 V 是奇数维欧氏空间，$\mathscr{T}$是 V 的旋转变换，$\boldsymbol{A}$ 是 $\mathscr{T}$的一个标准基下的矩阵，是一正交矩阵，故$|\boldsymbol{A}| = 1$. 从而

$$|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = |-(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E})| = (-1)^n |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}| = -|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}|. \quad ①$$

又，$\boldsymbol{A}$ 是正交的，故

$$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}|=|(\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}|$$
$$=|\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}|. \quad ②$$

由式①、②知，$|\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$，所以 1 是 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$ 的根，命题得证.

例 16 证明：第二类正交变换一定以 -1 作为它的一个特征值.

证 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上第二类正交变换所对应的矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 是正交方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

令 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$，则有

$$f(-1)=|(-1)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}||-\boldsymbol{A}'-\boldsymbol{E}|$$
$$=-|(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})'|=(-1)^{n+1}|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|.$$

所以 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，即 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

例 17 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的一个变换. 证明：如果 $\mathscr{A}$ 保持内积不变，即对于 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，则它一定是线性的，因而 $\mathscr{A}$ 是正交变换.

证 因为 $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})-\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$$
$$=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))-2(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))$$
$$-2(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))+(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})+2(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})+(\mathscr{A}\boldsymbol{\beta},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})$$
$$=(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})-2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$$
$$+2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=0,$$

所以
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})+\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}).$$

又
$$(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})-k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})-k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))$$
$$=(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}))-2(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}),k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})+(k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha})$$
$$=k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+k^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0,$$

所以 $\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}$. 综上知 $\mathscr{A}$ 为正交变换.

例 18 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 是 n 维欧氏空间中两个向量组. 证明存在一正交变换 $\mathscr{A}$，使 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$ 的充分必要条件是

$$(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j) \quad (i,j=1,2,\cdots,m).$$

证 必要性 设有正交变换 $\mathscr{A}$,使 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\boldsymbol{\beta}_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$,则

$$(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)=(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_i,\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)\quad(i,j=1,2,\cdots,m).$$

充分性 设 $(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\beta}_i,\boldsymbol{\beta}_j)$ $(i,j=1,2,\cdots,m)$,令 $V_1=L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$,$V_2=L(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m)$,且 $V=V_1\oplus V_1^{\perp}=V_2\oplus V_2^{\perp}$. 作由 V_1 到 V_2 的映射 $\mathscr{A}_1$,

$$\mathscr{A}_1(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m)=k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\beta}_m,$$

则 $\mathscr{A}_1$ 是 V_1 到 V_2 的一个同构映射,从而 V_1 与 V_2 的维数相同.

又 V_1 空间与其正交补的和是直和,所以 $V_1^{\perp}$ 与 $V_2^{\perp}$ 的维数也相同,从而同构. 设 $\mathscr{A}_2$ 是 $V_1^{\perp}$ 与 $V_2^{\frac{1}{2}}$ 间的一同构映射,并设 $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}_1+\boldsymbol{\gamma}_1'$,$\boldsymbol{\gamma}_1\in V_1$,$\boldsymbol{\gamma}_1'\perp V_1^{\perp}$,$\boldsymbol{\gamma}$ 为 V 中一向量. 令

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\gamma})=\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\gamma}_1)+\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\gamma}_1').$$

可以验证 $\mathscr{A}$ 是 V 的一个线性变换,且保持向量内积不变,所以 $\mathscr{A}$ 是正交变换. 特别是,$\boldsymbol{\alpha}_i=\boldsymbol{\alpha}_i+\boldsymbol{0}$,故

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}_i)=\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\alpha}_i)+\mathscr{A}_2(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{\beta}_i\quad(i=1,2,\cdots,m).$$

例 19 (1) 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是欧氏空间中两个不同的单位向量,证明存在一镜面反射 $\mathscr{A}$,使 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}$;

(2) 证明:n 维欧氏空间中任一正交变换都可以表成一系列镜面反射的乘积.

证 (1) 由题设,$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是不同的单位向量,所以 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=1$,且 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 故 $\boldsymbol{\eta}=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}$ 也是单位向量.

令 $\mathscr{A}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{x})\boldsymbol{\eta}$,则 $\mathscr{A}$ 是一镜面反射,有

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})&=\boldsymbol{\alpha}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\alpha}-2\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|},\boldsymbol{\alpha}\right)\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}\\&=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\\&=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2[(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})]}{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

$$=\boldsymbol{\alpha}-\frac{1-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}{1-(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\beta},$$

则
$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta}.$$

(2) 设 $\mathscr{A}$ 是欧氏空间 V 的正交变换，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组标准正交基，则 $\boldsymbol{\eta}_1=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\boldsymbol{\eta}_2=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,\boldsymbol{\eta}_n=\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 也是 V 的一组标准正交基.

当 $\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{\varepsilon}_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 时，$\mathscr{A}$ 是恒等变换.

作镜面反射 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{x})\boldsymbol{\varepsilon}_1$，则有 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=-\boldsymbol{\varepsilon}_1$，$\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{\varepsilon}_j\ (j=2,3,\cdots,n)$. 于是，有 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1\mathscr{A}_1$.

如果 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 不全相同，不妨设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1\neq\boldsymbol{\eta}_1$. 则由于 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\eta}_1$ 是两个不同的单位向量. 由题(1)知存在镜面反射 $\mathscr{A}_1$，使 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{\eta}_1$. 令 $\mathscr{A}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{\varepsilon}_j\ (j=2,3,\cdots,n)$.

如果 $\boldsymbol{\xi}_j=\boldsymbol{\eta}_j\ (j=2,3,\cdots,n)$，则 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1$，结论成立. 否则，可设 $\boldsymbol{\xi}_2\neq\boldsymbol{\eta}_2$，再作镜面反射 $\mathscr{A}_2$：$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-2(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{x})\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\eta}=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\eta}_2}{|\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\eta}_2|}$. 于是，$\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\eta}_2$，且可验算，有 $\mathscr{A}_2(\boldsymbol{\eta}_1)=\boldsymbol{\eta}_1$ 成立.

如此继续，设

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\xrightarrow{\mathscr{A}_1}\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\xrightarrow{\mathscr{A}_2}\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$$
$$\longrightarrow\cdots\xrightarrow{\mathscr{A}_s}\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n\quad(s\leqslant n),$$

故得 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_s\mathscr{A}_{s-1}\cdots\mathscr{A}_1$. 其中 $\mathscr{A}_i$ 都是镜面反射.

例 20 设 $\mathscr{A}$ 为正交变换，证明存在标准正交基使 $\mathscr{A}$ 的表示矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & \boldsymbol{A}_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix},\qquad ①$$

其中 $a_i=\pm 1\ (i=1,2,\cdots,r)$，$\boldsymbol{A}_j\ (j=1,2,\cdots,s)$ 为二阶正交矩阵，且没有实特征根.

证 任取一组标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，设 $\mathscr{A}$ 在此基下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，由任一正交阵必正交相似于如下形式矩阵，即存在正交阵 $\boldsymbol{T}$，使

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&\\&&&-1&&&&&&\\&&&&\ddots&&&&&\\&&&&&-1&&&&\\&&&&&&\cos\theta_1&-\sin\theta_1&&\\&&&&&&\sin\theta_1&\cos\theta_1&&\\&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&\cos\theta_s&-\sin\theta_s\\&&&&&&&&&\sin\theta_s&\cos\theta_s\end{bmatrix}.$$

从而存在正交阵 $\boldsymbol{T}$，使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$. 于是，以 $\boldsymbol{T}$ 为过渡矩阵从标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 得另一标准正交基 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_n$，

$$(\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{T},$$

而 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_n$ 上的表示矩阵即 $\boldsymbol{B}$. 命题得证.

例 21 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1) 求 a 的值；

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Y}$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

(3) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解 (1) 由于二次型 f 的秩为 2，故矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1-a&1+a&0\\1+a&1-a&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

的秩为 2，从而有

$$\begin{vmatrix} 1-a & 1+a \\ 1+a & 1-a \end{vmatrix} = -4a = 0, \Rightarrow a = 0.$$

(2) 当 $a=0$ 时，

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2)^2,$$

故 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=0$.

$\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1=(1,1,0)', \quad \boldsymbol{\eta}_2=(0,0,1)'.$$

$\boldsymbol{A}$ 的属于 $\lambda_3=0$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_3=(-1,1,0)'.$$

显然 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 两两正交.

将 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 单位化得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)', \quad \boldsymbol{e}_2=(0,0,1)', \quad \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)'.$$

取 $\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$，则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{QY}$，得

$$f(x_1,x_2,x_3)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2=2y_1^2+2y_2^2.$$

例 22 设 V 是 n 维欧氏空间，$\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 的非零向量. 定义沿 $\boldsymbol{\gamma}$ 方向的镜面反射如下：

$$S_{\gamma}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-2\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\gamma}.$$

(1) 验证 S_{γ} 是 V 上的正交变换；

(2) 设 $W_1=\{\boldsymbol{\beta}\in V \mid (\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0\}$，证明：$S_{\gamma}|_{W_1}=1_{W_1}$；

(3) 设 $W_2=L(\boldsymbol{\gamma})$，证明：$S_{\gamma}|_{W_2}=-1_{W_2}$；

(4) 证明：$W_1=W_2^{\perp}$，从而 S_{γ} 是 V 的第二类正交变换；

(5) $S_\gamma^2=1_V$.

证 (1) $(S_\gamma(\boldsymbol{\alpha}),S_\gamma(\boldsymbol{\alpha}))$

$$=\left(\boldsymbol{\alpha}-2\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}-2\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\gamma}\right)$$

$$=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})-2\times 2\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+2^2\frac{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})^2}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})^2}(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})$$

$$=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}).$$

显然 S_γ 是 V 上的线性函数，故 S_γ 是 V 上的正交变换.

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}\in W_1$，则有 $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0$，从而

$$S_\gamma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-\frac{2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha},$$

即

$$S_\gamma|_{W_1}=1_{W_1}.$$

(3) $S_\gamma(\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\gamma}-\frac{2(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}{(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma})}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}-2\boldsymbol{\gamma}=-\boldsymbol{\gamma}$.

又由于 $W_2=L(\boldsymbol{\gamma})$，所以 $S_\gamma|_{W_2}=-1_{W_2}$.

(4) 由定义即可得到 $W_1=W_2^{\perp}$. 又因为 $V=W_1\oplus W_2$. 取 W_1 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1}$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-1},\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 的一组基，而 S_γ 在这组基下的矩阵为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1\end{bmatrix}.$$

从而 $|\mathbf{A}|=-1$，故 S_γ 是第二类正交变换.

(5) 由于 $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$，故 $S_\gamma^2=1_V$.

第四节 实对称矩阵的标准形

主要内容

1. 引理 1 设 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，则 $\mathbf{A}$ 的特征值皆为实数.

对于实对称矩阵 $\mathbf{A}$，在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上定义线性变换 $\mathscr{A}$

$$\mathscr{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'=\mathbf{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)', \qquad ①$$

则 $\mathscr{A}$ 在标准正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,0,\cdots,0)',\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,1,\cdots,0)',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,0,\cdots,1)'$ 下的矩阵就是 $\mathbf{A}$.

2. 引理 2 设 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，$\mathscr{A}$ 是上面定义的线性变换，则对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^n$，有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})) \quad \text{或者} \quad \boldsymbol{\beta}'(\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{A}\boldsymbol{\beta}. \qquad ②$$

定义 1 欧氏空间中满足式②的线性变换称为**对称变换**.

3. 引理 3 设 $\mathscr{A}$ 是对称变换，V_1 是 $\mathscr{A}$-子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是 $\mathscr{A}$-子空间.

4. 引理 4 设 $\mathbf{A}$ 是实对称矩阵，则 $\mathbf{R}^n$ 中属于 $\mathbf{A}$ 的不同特征值的特征向量必正交.

定理 1 对于任意一个 n 级实对称矩阵 $\mathbf{A}$，都存在一个 n 阶正交矩阵 $\mathbf{T}$，使 $\mathbf{T}'\mathbf{A}\mathbf{T}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 成对角形.

定理 2 任意一个实二次型 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，$a_{ij}=a_{ji}$，都可以经过正交的线性替换变成平方和

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中平方项的系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 就是矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式的全部的根.

疑难解析

试叙述求实对称矩阵 A 的正交矩阵的步骤？

答 (1) 求出 $\mathbf{A}$ 的全部不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$.

(2) 对每个 λ_i，解齐次线性方程组 $(\lambda_i\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}'=\mathbf{0}$，求出一个基础解系，即 $\mathbf{A}$ 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基，再由此求出 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\boldsymbol{\eta}_{i1},\boldsymbol{\eta}_{i2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{ik_i}$.

(3) 因为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 两两不同，故向量组 $\boldsymbol{\eta}_{11},\boldsymbol{\eta}_{12},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{1k_1},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{r1},\boldsymbol{\eta}_{r2},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{rk_r}$ 是两两正交的，它们的个数等于空间的维数，是 $\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基，也都是 $\mathbf{A}$ 的特征向量，则

$$T=(\boldsymbol{\eta}_{11},\boldsymbol{\eta}_{12},\cdots,\boldsymbol{\eta}_{rk_r})$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的正交矩阵.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是实对称矩阵,证明:存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式的根全部相同.

证 充分性 设实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有完全相同的特征根 λ_1, $\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则存在正交矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$,使

$$\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Y}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n\end{bmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{Y}^{-1}$,则 $\boldsymbol{T}$ 为正交阵,且 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$.

必要性 若 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同,所以它们有相同的特征根.

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,证明:存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}.$$

证 设 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的任一特征值,$\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{0}$ 是属于 λ 的特征向量,则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$,且

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2\boldsymbol{\alpha}.$$

于是知,$\lambda^2=\lambda\Longrightarrow\lambda=1$ 或 $\lambda=0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 1 或 0. 故存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}.$$

例 3 欧氏空间 V 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 称为**反对称的**，如果对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$. 证明：

(1) $\mathscr{A}$ 为反对称的充分必要条件是，$\mathscr{A}$ 在一组标准正交基下的矩阵是反对称的.

(2) 如果 V_1 是反对称变换的不变子空间，则 $V_1^{\perp}$ 也是.

证 (1) 必要性 设 $\mathscr{A}$ 是反对称变换，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组标准正交基，在此基下 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，则有

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=a_{i1}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{i2}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{in}\boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

于是 $$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i),\boldsymbol{\varepsilon}_j)=a_{ij},\quad (\boldsymbol{\varepsilon}_i,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_j))=a_{ji}. \qquad ①$$

因为 $\mathscr{A}$ 反对称，故得 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵.

充分性 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$是反对称矩阵，即 $a_{ij}=-a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$. 由式①得

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i),\boldsymbol{\varepsilon}_j)=-(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_j)). \qquad ②$$

设 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，$\boldsymbol{\beta}=y_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+y_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$，则由式②得$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$，即 $\mathscr{A}$ 为一反对称变换.

(2) 设 V_1 是反对称变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间，$\boldsymbol{\alpha}$ 为 V_1 的正交补 $V_1^{\perp}$ 中的任一向量，$\boldsymbol{\beta}$ 为 V_1 中的任一向量，则 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta})\in V_1$，且有

$$(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=-(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=0,$$

即 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})$与 V_1 中任一向量正交，故 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})\in V_1^{\perp}$. 从而知 $V_1^{\perp}$ 对 $\mathscr{A}$ 也不变.

例 4 设 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，证明：存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & -E_{n-r} \end{bmatrix}.$$

证 因为 A 是实对称矩阵，故存在正交方阵 T_1，使

$$T_1^{-1}AT_1=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

其中 λ_i 是 A 的特征根.

因为 $A^2=E$，故有 $(T_1^{-1}AT_1)^2=T^{-1}A^2T_1=E$. 又

$$(T_1^{-1}AT_1)^2=\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & & & \\ & \lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^2 \end{bmatrix},$$

所以 $\lambda_i^2=1$，$\lambda_i=\pm1$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 设 1 的重数为 r，则 -1 重数为 $n-r$，适当交换行列，可得正交矩阵 T，使得

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} E_r & O \\ O & E_{n-r} \end{bmatrix}.$$

例 5 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 是一实二次型，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征多项式的根，且 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，证明：对任一 $X\in\mathbf{R}^n$，有

$$\lambda_1X'X\leqslant X'AX\leqslant\lambda_nX'X.$$

证 因为 A 是实对称的，所以存在正交矩阵 T，使得

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

则由 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$ 得，$T^{-1}AT-\lambda_1E=T^{-1}(A-\lambda_1E)T$ 的特征根为 $0,\lambda_2-\lambda_1,\cdots,\lambda_n-\lambda_1$，且都是非负实数，故 $A-\lambda_1E$ 是半正定的.

因此，对任意实 n 维向量 X，都有

$$X'(A-\lambda_1 E)X \geqslant 0, \quad 即 \quad \lambda_1 X'X \leqslant X'AX. \qquad ①$$

同理，由于 $\lambda_n E - T^{-1}AT = T^{-1}(\lambda_n E - A)T$ 的特征根为 $\lambda_n - \lambda_1, \cdots, \lambda_n - \lambda_{n-1}, 0$，都是非负实数，故 $\lambda_n E - A$ 也是半正定的，从而对任意实 n 维向量 X 都有

$$X'(\lambda_n E - A)X \geqslant 0, \quad 即 \quad X'AX \leqslant \lambda_n X'X. \qquad ②$$

综合式①与式②得 $\lambda_1 X'X \leqslant X'AX \leqslant \lambda_n X'X$.

例 6 设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的矩阵为 A，λ 是 A 的特征多项式的根，证明：存在 $\mathbf{R}^n$ 中的非零向量 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$，使得

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) = \lambda(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \cdots + \bar{x}_n^2).$$

证 因为 A 是实对称阵，λ 是实数，故存在实非零向量 $\alpha = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)'$，使 $A\alpha = \lambda\alpha$. 在等式两端左乘 α'，得

$$\alpha' A \alpha = \alpha' \lambda \alpha,$$

即
$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) = \lambda(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 + \cdots + \bar{x}_n^2).$$

例 7 设 A, B 是两个 $n \times n$ 实对称矩阵，且 B 是正定矩阵，证明：存在一个 $n \times n$ 实可逆矩阵 T，使 $T'AT$ 与 $T'BT$ 同时为对角形.

证 已知 B 是正定矩阵，故必存在可逆阵 C，使 $C'BC = E$. 而 $C'AC$ 仍为对称阵，所以必存在正交阵 D，使得

$$D'(C'AC)D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

令 $T = CD$，知 T 为可逆阵，

$$T'AT = (CD)'A(CD), \quad T'BT = D'C'BCD = D'ED = E.$$

所以 $T'AT$ 与 $T'BT$ 同时为对角形.

例 8 证明：在 n 阶实对称矩阵中，正定矩阵只能与正定矩阵相似.

证 设 n 阶实对称矩阵 A 与 B 相似. 当 A 为正定矩阵时，A 的特征根全为正实数. 由于相似方阵有相同的特征根，从而 B 的特征根也全是正实数，所以 B 也是正定矩阵.

例 9 证明:每个实可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 必可表为一个正定矩阵与一个正交矩阵的乘积,即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{T}_1=\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{B}_2$. 这里 $\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$ 是正定矩阵,$\boldsymbol{T}_1,\boldsymbol{T}_2$ 是正交矩阵.

证 因为 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,所以 $\boldsymbol{AA}'$ 是正定的,由例 8 知,存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}_1$,使 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{B}_1^2$.

令 $$\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}_1,\quad \boldsymbol{AB}_1^{-1}=\boldsymbol{T}_2,$$

则 $$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{T}_1,\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}_2\boldsymbol{B}_1,$$

$$\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_1'=(\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{A})'=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{AA}'\boldsymbol{B}_1^{-1}=\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1^2\boldsymbol{B}_1^{-1}=\boldsymbol{E}.$$

所以 $\boldsymbol{T}_1$ 是正交矩阵.

类似可证 $\boldsymbol{T}_2$ 也是正交矩阵.

第五节　酉　空　间

主要内容

1. 定义 1 长度 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的距离,记为 $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

距离有三条基本性质:

(1) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=d(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$;

(2) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\geqslant 0$,当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 时等号才成立;

(3) $d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\leqslant d(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+d(\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\beta})$(三角不等式).

2. 最小二乘法问题:线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1s}x_s-b_1=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2s}x_s-b_2=0,\\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{ns}x_s-b_n=0 \end{cases}$$

可能无解,即任何一组数 $x_1,x_2,\cdots,x_s$ 都可能使

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{is}x_s-b_i)^2 \qquad ①$$

不等于零. 使式①取得最小的 $x_1^0,x_2^0,\cdots,x_s^0$,称为方程组的最小二

乘解. 这种问题称为最小二乘法问题.

3. **定义 2** 设 V 是复数域上的线性空间，在 V 上定义了一个二元复函数，称为**内积**，记为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

内积具有以下性质：

(1) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(\overline{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}})$，这里$(\overline{\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}})$是$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$的共轭复数；

(2) $(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$；

(3) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$；

(4) $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$是非负实数，且$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$.

这里 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 中任意的向量，k 为任意复数. 这样的线性空间称为**酉空间**.

酉空间有一套与欧氏空间平行的理论.

对复矩阵 $\boldsymbol{A}$，若满足 $\overline{\boldsymbol{A}}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**酉矩阵**，其行列式的绝对值等于 1.

酉空间 V 的线性变换 $\mathscr{A}$，如果满足$(\mathscr{A}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$，就称 $\mathscr{A}$ 为 V 的一个**酉变换**. 酉变换在标准正交基下的矩阵是酉矩阵.

两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\overline{\boldsymbol{A}}'=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}$ 称为**埃尔米特**(Hermite)**矩阵**. 在酉空间 $\mathbf{C}^n$ 中令

$$\mathscr{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n)'=\boldsymbol{A}(x_1,x_2,\cdots,x_n),$$

则 $(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))$，$\mathscr{A}$ 也是对称变换.

埃尔米特矩阵的特征值为实数，它的属于不同特征值的特征向量必正交.

若 $\boldsymbol{A}$ 是埃尔米特矩阵，则有酉矩阵 $\boldsymbol{C}$，使 $\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\overline{\boldsymbol{C}}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是对角形矩阵. 二次齐次函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i\overline{x}_j=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{X}}$$

称为**埃尔米特二次型**. 必有酉矩阵 $\boldsymbol{C}$，当 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}$ 时，

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1y_1\overline{y}_1+d_2y_2\overline{y}_2+\cdots+d_ny_n\overline{y}_n.$$

疑难解析

1. 酉空间与欧氏空间有何联系与区别？

答 酉空间又称 U 空间，其英文名称为：unitary space. 它是欧氏空间在复数域上的自然类比，它的许多概念和命题与欧氏空间相应的概念与命题完全平行.

但是，因为酉空间是定义在复数域上的，所以其内积是复数，故不能定义两向量间的夹角.

2. 怎样理解最小二乘法？

答 找 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 使 $\sum_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{is}x_s-b_i)^2$ 为最小，就是在 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 中找一个向量 $\boldsymbol{Y}$，使得 $\boldsymbol{B}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$ 到它的距离比到 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$ 中其它向量的距离都短. 故设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 是所求向量，则由 $\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{B}$ 可求得解.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 求下列方程的最小二乘解：

$$\begin{cases}0.39x-1.89y=1,\\0.61x-1.80y=1,\\0.93x-1.68y=1,\\1.35x-1.50y=1.\end{cases}$$

用“到子空间距离最短的线是垂线”的语言表达上面方程组的最小二乘解的几何意义，由此列出方程并求解.

解 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0.39&-1.89\\0.61&-1.80\\0.93&-1.68\\1.35&-1.50\end{bmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2),\quad \boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix},$$

$$Y=\boldsymbol{\alpha}_1x+\boldsymbol{\alpha}_2y=\begin{bmatrix}0.39x & -1.89y\\0.61x & -1.80y\\0.93x & -1.68y\\1.35x & -1.50y\end{bmatrix},$$

则"到子空间距离最短的线是垂线"应理解为$|Y-B|^2$ 值为最小，因而最小二乘解的几何意义是在$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)$中求内射影$Y$.

由$A'AX=A'B$,得方程组

$$\begin{cases}3.2116x-5.4225y=3.28,\\-5.4225x+11.8845y=-6.87,\end{cases}$$

解得 $x=0.197,\quad y=-0.488.$

例 2 证明:酉空间中两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵.

证 设$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$与$\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\cdots,\boldsymbol{\delta}_n$是酉空间的两组标准正交基.它们间的过渡矩阵$A=(a_{ij})$,即

$$\boldsymbol{\delta}_i=a_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

$$(\boldsymbol{\delta}_i,\boldsymbol{\delta}_j)=(a_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n,a_{1j}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2j}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{\varepsilon}_n)$$

$$=a_{1i}\bar{a}_{1j}+a_{2i}\bar{a}_{2j}+\cdots+a_{ni}\bar{a}_{nj}=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j.\end{cases}$$

即得$\bar{A}'A=E$.所以A是酉矩阵.

例 3 证明:酉矩阵的特征根的模为 1.

证 酉矩阵A对应的变换是酉变换$\mathscr{A}$,设λ是其特征值,$\boldsymbol{\alpha}$是属于λ的特征向量,则由$\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\alpha}$得

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=(\lambda\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})\neq 0,$$

知$\lambda\bar{\lambda}=1$,即λ的模为 1.

若λ,μ为A的两个不同的特征值,X,Y是分别属于λ和μ的特征向量,则由$AX=\lambda X,AY=\mu Y$,得

$$\bar{X}'Y=\bar{X}'(\bar{A}'A)Y=(\overline{AX})'(AY)=\lambda\mu\bar{X}'Y,$$

即 $$(\bar{\lambda}\mu-1)\bar{X}'Y=0.$$

但是

$$(\bar{\lambda}\mu-1)\lambda=\lambda\bar{\lambda}\mu-\lambda=|\lambda|^2\mu-\lambda=\mu-\lambda\neq 0\Rightarrow\bar{\lambda}\mu-1\neq 0,$$

因而 $\overline{X}'Y=(X,Y)=0$，即 A 的属于不同特征值的特征向量正交.

例 4 设 A 是一个 n 阶可逆复矩阵，证明 A 可以分解成 $A=UT$，其中 U 是酉矩阵，T 是一个上三角形矩阵

$$T=\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix},$$

其中对角线上元素 t_{ii} $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是正实数. 并证明这个分解是唯一的.

证 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是 n 阶可逆复矩阵，列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，所以组成酉空间 $\mathbf{C}^n$ 的一组基. 将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 正交标准化，得标准正交基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，有

$$\begin{cases} \beta_1=x_{11}\alpha_1, \\ \beta_2=x_{12}\alpha_1+x_{22}\alpha_2, \\ \quad\vdots \\ \beta_n=x_{1n}\alpha_1+x_{2n}\alpha_2+\cdots+x_{nn}\alpha_n, \end{cases}$$

且每个 x_{ii} 为正实数.

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)X,$$

其中
$$X=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & x_{nn} \end{bmatrix}.$$

令 $U=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$，则 U 显然是酉矩阵，$T=X^{-1}$ 是上三角矩阵，且对角线上元素是正实数. 由 $U=AX$，得 $A=UX^{-1}=UT$.

再证分解的唯一性. 设又有 $A=U_1T_1$，U_1 为酉矩阵，T_1 为对角线上元素都是正实数的上三角形矩阵，则由 $U_1T_1=UT$ 得

$$U^{-1}U_1=TT_1^{-1}. \qquad ①$$

因为 $U^{-1}U$ 为酉矩阵，TT_1^{-1} 为上三角矩阵，所以将式①两端转

置共轭，则由上三角矩阵化为下三角矩阵知，式①右端必为对角矩阵，左端为酉矩阵；如例 3 知，$U^{-1}U_1$ 对角线上元素模为 1，TT_1^{-1} 的对角元素为正实数，故对角元素都为 1，即 $U^{-1}U_1$ 等于单位矩阵 E. 于是

$$U^{-1}U_1=TT_1^{-1}=E\Rightarrow U=U_1,\quad T=T_1.$$

例 5 证明埃尔米特矩阵的特征值是实数，并且它的属于不同特征值的特征向量相互正交.

证 设埃尔米特矩阵 A 确定的对称变换为 $\mathscr{A}$，λ 是 A 的一个特征值，则 $\forall\,\alpha\neq 0$，有 $\mathscr{A}(\alpha)=\lambda\alpha$，因此

$$\lambda(\alpha,\alpha)=(\lambda\alpha,\alpha)=(\mathscr{A}\alpha,\alpha)=(\alpha,\mathscr{A}\alpha)=(\alpha,\lambda\alpha)=\bar{\lambda}(\alpha,\alpha).$$

但是 $(\alpha,\alpha)>0$，所以 $\lambda=\bar{\lambda}$，即 λ 是实数.

设 λ,μ 是 A 的两个不同特征值，α,β 是分别属于 λ,μ 的特征向量，$\mathscr{A}(\alpha)=\lambda\alpha$，$\mathscr{A}(\beta)=\mu\beta$，则

$$\lambda(\alpha,\beta)=(\lambda\alpha,\beta)=(\mathscr{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathscr{A}\beta)=(\alpha,\mu\beta)=\bar{\mu}(\alpha,\beta).$$

但 $\lambda\neq\bar{\mu}=\mu$，故 $(\alpha,\beta)=0$，即 α 与 β 正交.

例 6 设 $\mathscr{A}$ 是酉空间的线性变换，证明：$\mathscr{A}$ 是酉变换的充要条件是

$$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\alpha))=(\alpha,\alpha),\quad \forall\,\alpha\in V.$$

证 必要性是显然的.

充分性　由 $(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\alpha))=(\alpha,\alpha)$ 知

$$(\mathscr{A}(\alpha+\beta),\mathscr{A}(\alpha+\beta))=(\alpha+\beta,\alpha+\beta),\quad \forall\,\alpha,\beta\in V,$$

即 $$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\alpha))+(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))+(\mathscr{A}(\beta),\mathscr{A}(\alpha))+(\mathscr{A}(\beta),\mathscr{A}(\beta))=(\alpha,\alpha)+(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)+(\beta,\beta),$$

亦即 $$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))+(\mathscr{A}(\beta),\mathscr{A}(\alpha))=(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha).\qquad ①$$

将 α 换成 $\mathrm{i}\alpha$，得

$$\mathrm{i}(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))-\mathrm{i}(\mathscr{A}(\beta),\mathscr{A}(\alpha))=\mathrm{i}(\alpha,\beta)-\mathrm{i}(\beta,\alpha),$$

即 $$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))-(\mathscr{A}(\beta),\mathscr{A}(\alpha))=(\alpha,\beta)-(\beta,\alpha).\qquad ②$$

由式①、②得

$$(\mathscr{A}(\alpha),\mathscr{A}(\beta))=(\alpha,\beta),\quad \forall\,\alpha,\beta\in V,$$

故 $\mathscr{A}$ 是酉变换.

例 7 设 W 是酉空间 V 的有限维子空间，把 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 映射为其在 W 中正射影 $\boldsymbol{\alpha}$ 的变换 $\mathscr{E}:V\to W,\boldsymbol{\beta}\mapsto\boldsymbol{\alpha}$，称为 V 到 W 的正射影(变换).

(1) 证明：$\mathscr{E}$ 是 V 的幂等变换(即 $\mathscr{E}^2=\mathscr{E}$)，像 $I_m\mathscr{E}=W$，核 $\ker\mathscr{E}=W^{\perp}$，且 $V=W\oplus W^{\perp}$；

(2) $I-\mathscr{E}$ 是 V 到 $W^{\perp}$ 的正射影变换，幂等，像为 $W^{\perp}$，核为 W.

证 (1) $I_m\mathscr{E}\subseteq W$ 是显然的. 又 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in W$，有 $\mathscr{E}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}$(因为 $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}\|\leqslant\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}\|$ 对一切 $\boldsymbol{\gamma}\in W$ 成立)，所以 $\mathscr{E}$ 是满射，故 $I_m\mathscr{E}=W$.

因为 $\forall\boldsymbol{\beta}\in V(\mathscr{E}(\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{\alpha}\in W)$，有 $\mathscr{E}^2(\boldsymbol{\beta})=\mathscr{E}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{E}(\boldsymbol{\beta})$，所以 $\mathscr{E}^2=\mathscr{E}$，即 $\mathscr{E}$ 是幂等变换.

又 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in W$，当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时，$\mathscr{E}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，故 $\ker\mathscr{E}\cap W=\{\mathbf{0}\}$. 而

$$\dim V=n=\dim\ker\mathscr{E}+\dim I_m\mathscr{E}=\dim(\ker\mathscr{E}+I_m\mathscr{E}),$$

故
$$V=\ker\mathscr{E}\oplus W=W^{\perp}\oplus W.$$

而 $\forall\boldsymbol{\beta}\in V$，有 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathscr{E}(\boldsymbol{\beta})\in W=I_m\mathscr{E},\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\in W^{\perp}.$$

因为 $\mathscr{E}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{E}(\boldsymbol{\beta})-\mathscr{E}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，所以 $\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}\in\ker\mathscr{E}$，故 $W^{\perp}=\ker\mathscr{E}$.

(2) 由题(1)知，$\forall\boldsymbol{\beta}\in V$，有直和分解.

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})=\mathscr{E}(\boldsymbol{\beta})+(I-\mathscr{E})\boldsymbol{\beta}=(I-(I-\mathscr{E}))\boldsymbol{\beta}+(I-\mathscr{E})\boldsymbol{\beta}.$$

故 $I_m(I-\mathscr{E})=W^{\perp}$，$\ker(I-\mathscr{E})=W$，且 $(I-\mathscr{E})^2=I-2\mathscr{E}+\mathscr{E}^2=I-\mathscr{E}$.

例 8 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 是酉空间 V 中一个非零正交向量，则对任意 $\boldsymbol{\beta}$ 有贝塞尔(Bessel)不等式

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{|(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta})|^2}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2}\leqslant\|\boldsymbol{\beta}\|^2,$$

当且仅当 $\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{k}(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta})\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^{-2}\boldsymbol{\alpha}_k$ 时等号成立.

证 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，故可将其扩为 V 的一组基，

再正交化得到 V 的一组正交基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\alpha}_{m+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 故 $\forall \boldsymbol{\beta} \in V$,设

$$\boldsymbol{\beta} = \mu_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \mu_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \mu_m\boldsymbol{\alpha}_m + \cdots + \mu_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

对等式两端与 $\boldsymbol{\alpha}_k$ 作内积,有

$$(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta}) = \left(\boldsymbol{\alpha}_k,\sum_{j=1}^{n}\mu_j\boldsymbol{\alpha}_j\right) = \mu_j(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_k) \quad (k = 1,2,\cdots,n),$$

故
$$\boldsymbol{\beta} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta})}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2}\boldsymbol{\alpha}_k.$$

由此得出

$$\|\boldsymbol{\beta}\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\mu_k\mu_k(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_k) = \sum_{k=1}^{n}\frac{|(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta})|^2}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2} \geqslant \sum_{k=1}^{m}\frac{|(\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\beta})|^2}{\|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2}.$$

当且仅当 $\mu_{m+1}=\cdots=\mu_n=0$,即 $\boldsymbol{\beta}\in L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m)$时,等号成立.

第十章　双线性函数与辛空间

利用双线性函数可以统一讨论二次型、欧氏空间与酉空间、对称矩阵等的问题.

第一节　线性函数与对偶空间

主要内容

1. 定义 1　设 V 是数域 P 上的一个线性空间，f 是 V 到 P 的一个映射，如果 f 满足

(1) $f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\beta})$，

(2) $f(k\boldsymbol{\alpha})=kf(\boldsymbol{\alpha})$，

式中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 V 中任意元素，k 是 P 中任意数，则称 f 为 V 上的一个**线性函数**.

V 上的线性函数 f 有以下简单性质：

(1) $f(\mathbf{0})=0$，　$f(-\boldsymbol{\alpha})=-f(\boldsymbol{\alpha})$，

(2) 若 $$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则 $$f(\boldsymbol{\beta})=k_1f(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2f(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+k_sf(\boldsymbol{\alpha}_s).$$

$f(\boldsymbol{X})=0$ 称为零函数.

定理 1　设 V 是 P 上一个 n 维线性空间，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 P 中任意 n 个数，存在唯一的 V 上的线性函数 f 使

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=a_i\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

2. 设 f,g 是 V 的线性函数，定义 $f+g$ 如下：

$$(f+g)(\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\alpha})+g(\boldsymbol{\alpha}),\quad \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

$f+g$ 也是线性函数，$f+g$ 称为 f 与 g 的和.

$$(f+g)(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=(f+g)(\boldsymbol{\alpha})+(f+g)(\boldsymbol{\beta}),$$
$$(f+g)(k\boldsymbol{\alpha})=k(f+g)(\boldsymbol{\alpha}).$$

设 f 是 V 上的线性函数，对 P 中任意数 k，定义函数 kf 如下：

$$(kf)(\boldsymbol{\alpha})=k(f(\boldsymbol{\alpha})),\quad \boldsymbol{\alpha}\in V.$$

kf 称为 k 与 f 的数量乘积，kf 是线性函数.

在上面定义的加法与数量乘法下，$L(V,P)$ 是数域 P 上的线性空间.

3. 取定 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，作 V 上 n 个线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，使得

$$f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\begin{cases}1,j=i,\\0,j\neq i\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n). \qquad ①$$

因为 f_i 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 上的值已确定，这样的函数是唯一存在的. 对 V 中向量 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$，有 $f_i(\boldsymbol{\alpha})=x_i$.

引理 对 V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$，有 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\varepsilon}_i$. 而对 $L(V,P)$ 中任意向量 f，有 $f=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\boldsymbol{\varepsilon}_i)f_i$.

定理 1 $L(V,P)$ 的维数等于 V 的维数，而且 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $L(V,P)$ 的一组基.

4. 定义 2 $L(P,V)$ 称为 V 的**对偶空间**. 由式①决定的 $L(V,P)$ 的基，称为 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的**对偶基**.

V 的对偶空间简记为 V^*.

定理 2 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是线性空间 V 的两组基，它们的对偶基分别为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 及 $g_1,g_2,\cdots,g_n$. 若由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 到 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 的过渡矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则由 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 到 $g_1,g_2,\cdots,g_n$ 的过渡矩阵为 $(\boldsymbol{A}')^{-1}$.

设 V^* 是 V 的对偶空间，定义 V^* 上函数

$$\boldsymbol{x}^{**}(f)=f(\boldsymbol{x}),\quad f\in V^*$$

式中 $\boldsymbol{x}\in V$. $\boldsymbol{x}^{**}$ 是 V^* 上线性函数，因此是 V^* 的对偶空间 V^{**} 中的元素.

定理 3 V 是一个线性空间，V^{**} 是 V 的对偶空间的对偶空间，V 到 V^{**} 的映射 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}^{**}$ 是一个同构映射.

疑难解析

试述求线性空间 V 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的对偶基的方法?

答 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in V$，设 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$，则对任 $f\in V^*$ 有

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{\alpha})&=x_1f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+x_2f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+x_nf(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\&=(f(\boldsymbol{\varepsilon}_1),f(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,f(\boldsymbol{\varepsilon}_n))(x_1,x_2,\cdots,x_n)'.\end{aligned}$$

又设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的对偶基，则

$$f_i(\boldsymbol{\alpha})=x_1f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+x_2f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+x_nf(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

即有

$$\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{\alpha})\\\vdots\\f_n(\boldsymbol{\alpha})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1)&f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_2)&\cdots&f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\f_n(\boldsymbol{\varepsilon}_1)&f_n(\boldsymbol{\varepsilon}_2)&\cdots&f_n(\boldsymbol{\varepsilon}_n)\end{bmatrix}=(f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j))\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.\quad①$$

由对偶基的定义，知

$$f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1,&i=j,\\0,&i\neq j.\end{cases}$$

所得 $(f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j))=\boldsymbol{E}_n$，故由式①得

$$f_1(\boldsymbol{\alpha})=x_1,\quad f_2(\boldsymbol{\alpha})=x_2,\quad\cdots,\quad f_n(\boldsymbol{\alpha})=x_n,$$

且对任 $f\in V^*$，有

$$f(\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)f_1+f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)f_2+\cdots+f(\boldsymbol{\varepsilon}_n)f_n,$$

即 f 在对偶基上的坐标即为 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1),f(\boldsymbol{\varepsilon}_2),\cdots,f(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$.

方法、技巧与典型例题分析

了解线性函数概念，会求线性函数，能够讨论有关线性空间关

于对偶基的命题等.要求对有关线性函数的概念、性质有充分的理解,对对偶空间及对偶基之间的关系及形成有足够的熟悉与了解.

例 1 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是线性空间 V 的基,f_i 是"取坐标"行动,即对 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,$f_i(\boldsymbol{\alpha})$就是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的坐标的第 i 个分量,证明 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的对偶基.

证 任取 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,设 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$,则 $f_i(\boldsymbol{\alpha})=a_i$.因为对任意的 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$,有

$$f_i(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f_i\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\boldsymbol{\varepsilon}_i\Big)=a_i+b_i=f_i(\boldsymbol{\alpha})+f_i(\boldsymbol{\beta}),$$

$$f_i(k\boldsymbol{\alpha})=f_i\Big(\sum_{i=1}^{n}ka_i\boldsymbol{\varepsilon}_i\Big)=ka_i=kf_i\boldsymbol{\alpha},$$

所以 f 是线性函数,$f_i\in V^*$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

又对任 $f\in V^*$ 和 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,有

$$f(\boldsymbol{\alpha})=f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)f_1(\boldsymbol{\alpha})+f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)f_2(\boldsymbol{\alpha})+\cdots+f(\boldsymbol{\varepsilon}_n)f_n(\boldsymbol{\alpha}),$$

所以
$$f=f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)f_1+f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)f_2+\cdots+f(\boldsymbol{\varepsilon}_n)f_n,$$

故 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 V^* 的一组基.

由 $f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=1,f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0,i\neq j$,即 $f_i(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,所以 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的对偶基.

例 2 V 是数域 P 上一个三维线性空间,$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是它的一组基,f 是 V 上一个线性函数,已知

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3)=1,\quad f(\boldsymbol{\varepsilon}_2-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)=-1,\quad f(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=-3,$$

求 $f(x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3)$.

解 因为 f 是线性函数,故有方程组

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)\qquad\qquad +f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=1,\\ \qquad\quad f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)-2f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=-1,\\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\qquad\qquad=-3,\end{cases}$$

解得 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=4,f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=-7,f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=-3$,故

$$f(x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3)=x_1f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+x_2f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+x_3f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)$$

$$=4x_1-7x_2-3x_3.$$

例 3 V 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 同例 2,试找出一个线性函数 f,使

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3)=f(\boldsymbol{\varepsilon}_1-2\boldsymbol{\varepsilon}_3)=0,\quad f(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2)=1.$$

解 由

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \qquad\qquad +f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=0, \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_1) \qquad\qquad -2f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=0, \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+f(\boldsymbol{\varepsilon}_2) \qquad\qquad =1 \end{cases}$$

解得 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=0,f(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=1,f(\boldsymbol{\varepsilon}_3)=0$,于是,对任意的 $\boldsymbol{\alpha}\in V$,若 $\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{3}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$,则线性函数为

$$f(\boldsymbol{\alpha})=f(x_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+x_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+x_3\boldsymbol{\varepsilon}_3)=x_2.$$

例 4 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是线性空间 V 的一组基,f_1,f_2,f_3 是它的对偶基.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3.$$

试证 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 V 的一组基并求它的对偶基(用 f_1,f_2,f_3 表出).

证 因为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

而 $|\boldsymbol{A}|=-1\neq 0$,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,是 V 的一组基.

设 g_1,g_2,g_3 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的对偶基,则由两组对偶基之间关系得

$$(g_1,g_2,g_3)=(f_1,f_2,f_3)(\boldsymbol{A}')^{-1}. \qquad ①$$

而

$$(\boldsymbol{A}')^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

将 $(\boldsymbol{A}')^{-1}$ 代入式①,得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的对偶基为

$$g_1=f_2-f_3,\quad g_2=f_1-f_2+f_3,\quad g_3=-f_1+2f_2-f_3.$$

例 5 设 V 是一个线性空间,$f_1,f_2,\cdots,f_s$ 是 V^* 中非零向

量，试证：存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V$，使

$$f_i(\boldsymbol{\alpha})\neq 0 \quad (i=1,2,\cdots,s).$$

证 对于每一个 f_i $(i=1,2,\cdots,s)$，构造 V 的子空间 $W_i=\{\boldsymbol{\alpha}\mid f_i(\boldsymbol{\alpha})=0,\boldsymbol{\alpha}\in V\}$. 由于 $f_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 知 W_i 是 V 的非平凡子空间，则依第六章第五节例 16 知，存在 $\boldsymbol{\alpha}\in V$ 且 $\boldsymbol{\alpha}\overline{\in} W_i$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 满足 $f_i(\boldsymbol{\alpha})\neq 0$.

例 6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是线性空间 V 中非零向量，证明有 $f\in V^*$，使 $f(\boldsymbol{\alpha}_i)\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

证 因为 V 与 V^{**} 同构，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 V 中非零向量，所以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{**},\boldsymbol{\alpha}_2^{**},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s^{**}$ 是 $V^*=(V^*)^*$ 的非零向量. 则由例 5 知，存在 $f\in V^*$，使 $\boldsymbol{\alpha}_i^{**}(f)\neq 0$，即 $f(\boldsymbol{\alpha}_i)\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,s)$.

例 7 $V=P[x]_3$，对 $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\in V$ 定义

$$f_1(p(x))=\int_0^1 p(x)\mathrm{d}x,$$

$$f_2(p(x))=\int_0^2 p(x)\mathrm{d}x,$$

$$f_3(p(x))=\int_0^{-1} p(x)\mathrm{d}x,$$

试证：f_1,f_2,f_3 都是 V 上的线性函数，并找出 V 的一组基 $p_1(x)$，$p_2(x)$，$p_3(x)$，使 f_1,f_2,f_3 是其对偶基.

证 利用定积分性质，$\forall\, p(x),q(x)\in P[x]_3$ 和 $k,l\in P$，有

$$\begin{aligned}f_1(kp(x)+lq(x))&=\int_0^1[kp(x)+lq(x)]\mathrm{d}x\\&=kf_1(p(x))+lf_1(q(x)),\end{aligned}$$

故 f_1 是 $P[x]_3$ 上线性函数.

同理，f_2,f_3 也是 $P[x]_3$ 上的线性函数.

设 $p_i(x)=a_0^{(i)}+a_1^{(i)}x+a_2^{(i)}x^2$ $(i=1,2,3)$ 是 $P[x]_3$ 的一组基. 若 f_1,f_2,f_3 是其对偶基，则 f_1,f_2,f_3 应是标准基，即

$$\int_0^1(a_0^{(j)}+a_1^{(j)}x+a_2^{(j)}x^2\mathrm{d}x=a_0^{(j)}+\frac{1}{2}a_1^{(j)}+\frac{1}{3}a_2^{(j)}$$

$$= \begin{cases} 0, & j \neq 1, \\ 1, & j = 1, \end{cases}$$

$$\int_0^2 (a_0^{(j)} + a_1^{(j)} x + a_2^{(j)} x^2 \mathrm{d}x = 2a_0^{(j)} + 2a_1^{(j)} + \frac{8}{3} a_2^{(j)}$$

$$= \begin{cases} 0, & j \neq 2, \\ 1, & j = 2, \end{cases}$$

$$\int_0^{-1} (a_0^{(j)} + a_1^{(j)} x + a_2^{(j)} x^2 \mathrm{d}x = - a_0^{(j)} + \frac{1}{2} a_1^{(j)} - \frac{1}{3} a_2^{(j)}$$

$$= \begin{cases} 0, & j \neq 3, \\ 1, & j = 3. \end{cases}$$

其矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 2 & 8/3 \\ -1 & 1/2 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0^{(1)} & a_0^{(2)} & a_0^{(3)} \\ a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

于是 $$\begin{bmatrix} a_0^{(1)} & a_0^{(2)} & a_0^{(3)} \\ a_1^{(1)} & a_1^{(2)} & a_1^{(3)} \\ a_2^{(1)} & a_2^{(2)} & a_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/6 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

从而 $P[x]_3$ 的基为

$$p_1(x) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2, \quad p_2(x) = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x^2,$$

$$p_3(x) = -\frac{1}{3} + x - \frac{1}{2}x^2.$$

而 f_1, f_2, f_3 恰为其对偶基.

例 8 设 V 是一个 n 维空间,其内积为$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$,对 V 中确定的向量$\boldsymbol{\alpha}$,定义 V 上一个函数 $\boldsymbol{\alpha}^*$:$\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 是 V 上线性函数;

(2) 证明 V 到 V^* 的映射 $\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}^*$ 是 V 到 V^* 的一个同构映射.(在这个同构下,欧氏空间可看成自身的对偶空间)

证 (1) $\forall \boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V$ 与 $k\in\mathbf{R}$,因为

$\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\gamma})$,

$$\boldsymbol{\alpha}^*(k\boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta})=k(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\beta}),$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 是 V 上的线性函数.

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组标准正交基,且 $\boldsymbol{\alpha}_i\to\boldsymbol{\alpha}_i^*$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 因为

$$\boldsymbol{\alpha}_i^*(\boldsymbol{\alpha}_j)=(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}_1^*,\boldsymbol{\alpha}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n^*$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的对偶基. 因为线性空间 V 与 V^* 两组基之间的对应是同构对应,因而 $\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}^*$ 是 V 到 V^* 的同构映射.

例 9 设 $\mathscr{A}$ 是 P 上 n 维空间 V 的一个线性变换,

(1) 证明:对 V 上的线性函数 f, $f\mathscr{A}$ 仍是 V 上的线性函数;

(2) 定义 V^* 到自身的映射 $\mathscr{A}^*$ 为 $f\to f\mathscr{A}$. 证明:$\mathscr{A}^*$ 是 V^* 上的线性变换;

(3) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基,$f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是它的对偶基,并设 $\mathscr{A}$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的矩阵为 $\mathbf{A}$. 证明:$\mathscr{A}^*$ 在 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 下的矩阵为 $\mathbf{A}'$.(因此 $\mathscr{A}^*$ 被称为转置映射)

证 (1) $\forall\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k\in P$,因为

$$\begin{aligned}(f\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})&=f(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}))=f(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))+f(\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))\\&=(f\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha})+(f\mathscr{A})(\boldsymbol{\beta}),\end{aligned}$$

$$(f\mathscr{A})(k\boldsymbol{\alpha})=f(\mathscr{A}(k\boldsymbol{\alpha}))=f(k\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=kf(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=k(f\mathscr{A})(\boldsymbol{\alpha}),$$

所以,$f\mathscr{A}$ 是 V 上的线性函数.

(2) $\forall\,f,g\in V^*,l\in P$,因为

$$\mathscr{A}^*(f+g)=(f+g)\mathscr{A}=f\mathscr{A}+g\mathscr{A}=\mathscr{A}^*(f)+\mathscr{A}^*(g),$$

$$\mathscr{A}^*(lf)=(lf)\mathscr{A}^*=l(f\mathscr{A})=l\mathscr{A}^*(f),$$

所以,$\mathscr{A}^*$ 是 V 上的线性变换.

(3) 因为 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\mathbf{A}$,所以

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=a_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

又因为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的对偶基,故

$$(f_j\mathscr{A})(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=f_i(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i))$$

$$=a_{1i}f_j(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+a_{2i}f_j(\boldsymbol{\varepsilon}_2)+\cdots+a_{ni}f_j(\boldsymbol{\varepsilon}_n)$$
$$=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n). \qquad ①$$

又设 $\mathscr{A}^*(f_1,f_2,\cdots,f_n)=(f_1,f_2,\cdots,f_n)\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$，则

$$\mathscr{A}^*(f_j)=b_{1j}f_1+b_{2j}f_2+\cdots+b_{nj}f_n,$$

于是 $\mathscr{A}^*(f_j)(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=(b_{1j}f_1+b_{2j}f_2+\cdots+b_{nj}f_n)(\boldsymbol{\varepsilon}_i)$
$$=b_{1j}f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_i)+b_{2j}f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_i)+\cdots+b_{nj}f_n(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=b_{ij}. \qquad ②$$

但是，$\mathscr{A}^*(f_j)=f_1\mathscr{A}$，故由式①、式②得

$$b_{ij}=\mathscr{A}^*(f_j)(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=(f_j\mathscr{A})(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=a_{ji}\quad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

即
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}'.$$

例 10 设 $V=M_n(P)$，$\boldsymbol{A}\in V$，证明：$f:\boldsymbol{X}\mapsto \mathrm{Tr}(\boldsymbol{AX})$，$\boldsymbol{X}\in V$ 是 V 上的线性函数.

证 $\forall \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in V$，$k,l\in P$，因为

$$f(k\boldsymbol{X})=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X})=\mathrm{Tr}(k(\boldsymbol{AX}))$$
$$=k\cdot\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AX})=kf(\boldsymbol{X}),$$
$$f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}))=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{AY})$$
$$=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AX})+\mathrm{Tr}(\boldsymbol{AY})=f(\boldsymbol{X})+f(\boldsymbol{Y}),$$

所以，f 是 V 上的线性函数.

例 11 设 V 是数域 P 上一个线性空间，$f_1,f_2,\cdots,f_k$ 是 V 上 k 个线性函数.

(1) 证明下列集合 $W=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f_i(\boldsymbol{\alpha})=0,1\leqslant i\leqslant k\}$ 是 V 的一个子空间. W 称为线性函数 $f_1,f_2,\cdots,f_k$ 的零化子空间.

(2) 证明：V 的任一个子空间皆为某些线性函数的零化子空间.

证 (1) 由 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是线性函数知，$f_i(\boldsymbol{0})=0,1\leqslant i\leqslant k$，故 $\boldsymbol{0}\in W$，即 W 非空. 又 $\forall\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,k\in P$，有

$$f_i(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=f_i(\boldsymbol{\alpha})+f_i(\boldsymbol{\beta})=0+0=0,$$
$$f_i(k\boldsymbol{\alpha})=kf_i(\boldsymbol{\alpha})=0,\quad 1\leqslant i\leqslant k.$$

于是，$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in W$，$k\boldsymbol{\alpha}\in W$，知 W 是 V 的一个子空间.

(2) 如果取 $W=V$，f 为 V 的零函数，即 $f(\boldsymbol{\alpha})=0$，$\boldsymbol{\alpha}\in V^{-}$，则 $W=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f(\boldsymbol{\alpha})=0\}=V$，故 W 是 f 的零化子空间.

若取 $W=\{\mathbf{0}\}$，f 为 V 上任意线性函数，则 $f(\mathbf{0})=0$，W 是 f 的零化子空间.

若取 W 是 V 的 k 维非平凡子空间，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是 W 的一组基，它可扩充为 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$. 再取其对偶基 $f_1,f_2,\cdots,f_k,f_{k+1},\cdots,f_n$，使其为 V 上的线性函数，且有

$$f_i(\boldsymbol{\alpha}_j)=0\quad(i=k+1,k+2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,k).$$

任取 $\boldsymbol{\beta}\in W$，$\boldsymbol{\beta}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k$，故

$$f_i(\boldsymbol{\beta})=l_1f(\boldsymbol{\alpha}_1)+l_2f(\boldsymbol{\alpha}_2)+\cdots+l_kf(\boldsymbol{\alpha}_k)=0\quad(i=k+1,\cdots,n).$$

从而
$$\boldsymbol{\beta}\in\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f_i(\boldsymbol{\alpha})=0,k+1\leqslant i\leqslant n\}.$$

反之，取 $\boldsymbol{\gamma}\in\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f_i(\boldsymbol{\alpha})=0,k+1\leqslant i\leqslant n\}$，则

$$\boldsymbol{\gamma}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k+l_{k+1}\boldsymbol{\alpha}_{k+1}+\cdots+l_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$
$$f_i(\boldsymbol{\gamma})=0+l_{k+1}f_i(\boldsymbol{\alpha}_{k+1})+\cdots+l_nf_i(\boldsymbol{\alpha}_n).$$

由于
$$f_i(\boldsymbol{\gamma})=0,k+1\leqslant i\leqslant n,\quad f_i(\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

故
$$l_{k+1}=l_{k+2}=\cdots=l_n=0,$$

则 $\boldsymbol{\gamma}=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_k\boldsymbol{\alpha}_k\in W$，故 $W=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f_i(\boldsymbol{\alpha})=0,k+1\leqslant i\leqslant n\}$，即确有 V 上的线性函数 $f_{k+1},f_{k+2},\cdots,f_n$，使 W 为它们的零化子空间.

第二节　双线性函数

主 要 内 容

1. 定义 1　V 是数域 P 上一个线性空间，$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 V 上一个二元函数，即对 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$，根据 f 都唯一地对应于 P 中一个数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$. 如果 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 有下列性质：

(1) $f(\boldsymbol{\alpha},k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2)=k_1f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_1)+k_2f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}_2)$；

(2) $f(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=k_1f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+k_2f(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})$.

其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 V 中任意向量，k_1,k_2 是 P 中任意数，则称 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为 V 上的双线性函数.

2. 定义 2 设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 上的一个双线性函数，$\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基，则矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_n) \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_1) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_1) & f(\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_2) & \cdots & f(\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_n) \end{bmatrix}$$

称为 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 下的**度量矩阵**.

同一双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的.

定义 3 设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是线性空间 V 上一个双线性函数，如果 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$，对任意 $\boldsymbol{\beta}\in V$，可推出 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，$f$ 就称为**非退化的**.

双线性函数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是非退化的充要条件是其度量矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非退化矩阵.

3. 定义 4 设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是线性空间 V 上的双线性函数，若对 V 中任意两个向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 都有 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=-f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})$，则称 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 为反对称双线性函数.

双线性函数是对称的，当且仅当它在任一组基下的度量矩阵是对称矩阵.

双线性函数是反对称的，当且仅当它在任一组基下的度量矩阵是反对称矩阵.

定理 1 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间，$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，使 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 在这组基下的度量矩阵为对角矩阵.

推论 1 设 V 是复数域上 n 维线性空间，$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 V 上对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$，对 V 中任意向量

$\boldsymbol{\alpha}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\beta}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\boldsymbol{\varepsilon}_i$，有

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}$$
$$-\cdots-x_ry_r\quad(0\leqslant p\leqslant r\leqslant n).$$

4. 定义 5 设 V 是数域 P 上线性空间，$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 V 上双线性函数. 当 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$ 时，V 上函数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})$ 称为与 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 对应的二次齐次函数.

对称双线性函数与二次齐次函数是 1-1 对应的.

5. 定理 2 设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 n 维线性空间 V 上反对称双线性函数，则存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_r,\boldsymbol{\varepsilon}_{-r},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$，使得

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_{-i})=1 & (i=1,2,\cdots,r);\\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0 & (i+j\neq 0);\\ f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\eta}_k)=0 & (\boldsymbol{\alpha}\in V,k=1,2,\cdots,s).\end{cases}$$

V 上的对称双线性函数如果是非退化的，则有 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 满足

$$\begin{cases}f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i)\neq 0 & (i=1,2,\cdots,n),\\ f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0 & (i\neq j).\end{cases}$$

这样的基称为 V 的对于 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 的**正交基**.

具有非退化反对称双线性函数的线性空间一定是偶数维的.

疑 难 解 析

1. 线性函数与双线性函数有何联系?

答 V 上的线性函数 f 是一个单变量函数，而双线性函数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 V 上的二元函数. 但在实际上，如果固定双线性函数中的一个变元，则双线性函数成为另一个变元的线性函数.

2. 在不同的基下，同一个双线性函数的度量矩阵有何关系?

答 在不同的基下，同一双线性函数的度量矩阵一般是不同的. 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 是 V 的两组基，对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{X}_1,$$
$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n)\boldsymbol{Y}_1,$$

则 $$X = CX_1,\quad Y = CY_1.$$

若双线性函数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 及 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$ 下的度量矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,则

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1)'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{Y}_1) = \boldsymbol{X}_1'(\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{Y}_1;$$

又 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}_1$,所以 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$. 即同一双线性函数在不同基下的度量矩阵是合同的.

3. 实对称双线性函数与实对称矩阵有什么关系?

答 对称双线性函数在 V 的任一组基下的度量矩阵是对称矩阵,反对称双线性函数在 V 的任一组基下的度量矩阵是反对称矩阵.

对称矩阵 $\boldsymbol{A} \in M_n(P)$ 必相合于一个对角矩阵

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(d_1,\cdots,d_r,0,\cdots,0) \quad (d_1\cdots d_r \neq 0, 0 \leqslant r \leqslant n).$$

当 $P = \mathbf{C}$ 时,$\boldsymbol{A}$ 相合于 $\boldsymbol{B} = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,0,\cdots,0)$.

当 $P = \mathbf{R}$ 时,$\boldsymbol{A}$ 相合于

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_p & & \\ & -\boldsymbol{E}_{r-p} & \\ & & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad (0 \leqslant p \leqslant r \leqslant n),$$

对于对称双线性函数以及对称矩阵的正定、半正定的讨论都是在实数域上进行的. 判别实对称矩阵正定的条件主要有两个:

(1) 实对称矩阵正定的充要条件是它们相合于单位矩阵;

(2) 实对称矩阵正定的充要条件是它的所有顺序主子式全大于零.

有关双线性函数的概念和结论与矩阵的相关概念和结论是平行的.

方法、技巧与典型例题分析

例 1 设 $V = P^2$,$\boldsymbol{\alpha} = (x_1, x_2)$,$\boldsymbol{\beta} = (y_1, y_2)$,定义

$$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix},$$

证明：f 是 V 上的双线性函数，并求它在自然基下的度量矩阵.

证 因为 $\boldsymbol{\alpha}'=(x_1',x_2')$，对 $k,k'\in P$，有

$$f(k\boldsymbol{\alpha}+k'\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta})=\begin{vmatrix} kx_1+k'x_1' & kx_2+k'x_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$=k\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}+k'\begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

$$=kf(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+k'f(\boldsymbol{\alpha}',\boldsymbol{\beta}).$$

同理可证 $f(\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta}+k'\boldsymbol{\beta}')=kf(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+k'f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}')$，其中 $\boldsymbol{\beta}'\in V$. 所以 f 是 V 上的双线性函数.

f 关于自然基的度量矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

例 2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 P 上一个 m 级矩阵，定义 $P^{m\times n}$ 上一个二元函数

$$f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}),\quad \boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\in P^{m\times n}.$$

(1) 证明 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 是 $P^{m\times n}$ 上的双线性函数；

(2) 求 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 在基

$$\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{1n},\boldsymbol{E}_{21},\cdots,\boldsymbol{E}_{2n},\cdots,\boldsymbol{E}_{m1},\boldsymbol{E}_{m2},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}$$

下的度量矩阵（$\boldsymbol{E}_{ij}$ 表示 i 行 j 列元素为 1，其余元素为零的 $m\times n$ 矩阵）.

证 (1) 任取 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Y}_1,\boldsymbol{Y}_2\in P^{m\times n}$，$l_1,l_2,k_1,k_2\in P$，因为

$$\begin{aligned}f(k_1\boldsymbol{X}_1+l_1\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y})&=\mathrm{Tr}[(k_1\boldsymbol{X}_1+l_1\boldsymbol{X}_2)'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}]\\&=k_1\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})+l_1\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y})\\&=k_1f(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{Y})+l_1f(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{Y}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{X},k_2\boldsymbol{Y}_1+l_2\boldsymbol{Y}_2)&=\mathrm{Tr}[\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}(k_2\boldsymbol{Y}_1+l_2\boldsymbol{Y}_2)]\\&=k_2\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_1)+l_2\mathrm{Tr}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_2)\\&=k_2f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}_1)+l_2f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}_2),\end{aligned}$$

所以，f 是 $P^{m\times n}$ 上的双线性函数.

(2) 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $\boldsymbol{E}_{is}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{jt}=a_{ij}\widetilde{\boldsymbol{E}}_{st}$. 故

$$f(\boldsymbol{E}_{is},\boldsymbol{E}_{jt})=\mathrm{Tr}(\boldsymbol{E}'_{is}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{jt})=\begin{cases}a_{ij}, & s=t,\\ 0, & s\neq t.\end{cases}$$

因为 $\dim P^{m\times n}=mn$，所以基的度量矩阵是 $mn\times mn$ 矩阵，是由 m^2 个 n 级矩阵组成的. 它在 i 行 j 列位置的 n 级块为

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{E}_{i1},\boldsymbol{E}_{j1}) & \cdots & f(\boldsymbol{E}_{i1},\boldsymbol{E}_{jn})\\ \vdots & & \vdots\\ f(\boldsymbol{E}_{in},\boldsymbol{E}_{j1}) & \cdots & f(\boldsymbol{E}_{in},\boldsymbol{E}_{jn})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{ij} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{ij}\end{bmatrix}=a_{ij}\boldsymbol{E}_n,$$

故所求度量矩阵为 $\begin{bmatrix} a_{11}\boldsymbol{E}_n & a_{12}\boldsymbol{E}_n & \cdots & a_{1n}\boldsymbol{E}_n\\ a_{21}\boldsymbol{E}_n & a_{22}\boldsymbol{E}_n & \cdots & a_{2n}\boldsymbol{E}_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}\boldsymbol{E}_n & a_{m2}\boldsymbol{E}_n & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{E}_n\end{bmatrix}$

例 3 在 P^4 中定义一个双线性函数 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$，对

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3,x_4),\ \boldsymbol{Y}=(y_1,y_2,y_3,y_4),$$

$$f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_2.$$

(1) 给定 P^4 的一组基

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,-2,-1,0),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_2=(1,-1,1,0),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3=(-1,2,1,1),\quad \boldsymbol{\varepsilon}_4=(-1,-1,0,1),$$

求 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$在这组基下的度量矩阵.

(2) 另取一组基

$$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4,(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4)\boldsymbol{T},$$

其中 $$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

求 $f(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$在 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的度量矩阵.

解 (1) 设在 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3,\boldsymbol{\varepsilon}_4$ 下的度量矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times 4}$，其中 $a_{ij}=f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)$，故

$$A=\begin{bmatrix}4 & 7 & -5 & -14\\ -1 & 2 & 2 & -7\\ 0 & -11 & 1 & 14\\ 15 & 4 & -15 & -2\end{bmatrix}.$$

(2) 设 f 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3,\boldsymbol{\eta}_4$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}$,则

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}-6 & 46 & 8 & 24\\ -18 & 26 & 16 & -72\\ -2 & -38 & 0 & 0\\ -6 & 86 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

例 4 设 V 是复数域上线性空间,其维数 $n\geqslant 2$, $f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})$是 V 上一个对称双线性函数.

(1) 证明 V 中有非零向量 $\boldsymbol{\xi}$,使 $f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=0$;

(2) 若 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$是非退化的,则必有线性无关的向量 $\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}$ 满足

$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=1,\quad f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})=0.$$

证 (1) 因为 V 的维数 $n\geqslant 2$,故必能取到向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关,并有 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=a$, $f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta})=b$, $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=c$. 若 a,b 中有一个为零,则结论成立.

若 a,b 均不为零,可令 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$,而 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$,

$$f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})+2tf(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+t^2f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}).$$

故当 $t=\frac{1}{b}[-c\pm\sqrt{c^2-ab}]$时, $f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=0$.

(2) 由题(1)知 V 中有非零向量 $\boldsymbol{\xi}$ 使 $f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=0$,又因为 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$非退化的,故有向量 $\boldsymbol{\omega}$,使 $f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\omega})=b\neq 0$. 若取 $\boldsymbol{\delta}=\frac{1}{b}\boldsymbol{\omega}$,则 $f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\delta})=1$,

若 $f(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta})=0$,则 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\delta}$ 即为所求.

若 $f(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta})=a\neq 0$,可令 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\delta}-\frac{a}{2}\boldsymbol{\xi}$,此 $\boldsymbol{\eta}$ 即为所求. 因为此时

$$f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta})=f(\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\delta})-af(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\delta})+\frac{a^2}{4}f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\xi})=a-a+0=0,$$

$$f(\xi,\eta)=f\left(\xi,\delta-\frac{a}{2}\xi\right)=f(\xi,\delta)-\frac{a}{2}f(\xi,\xi)=1.$$

例 5 试证：线性空间 V 上双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称的充要条件是，对任意 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$.

证 充分性 若 $\forall\alpha\in V, f(\alpha,\alpha)=0$，则对任意 $\alpha,\beta\in V$，有

$$\begin{aligned}0&=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)+f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)+f(\beta,\beta)\\&=f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha),\end{aligned}$$

故 $f(\alpha,\beta)=-f(\beta,\alpha)$，所以 $f(\alpha,\beta)$ 是反对称双线性函数.

必要性 由 f 是反对称的，即对任意 $\alpha,\beta\in V$，有 $f(\alpha,\beta)=-f(\alpha,\beta)$，故只需取 $\beta=\alpha$，则有

$$f(\alpha,\alpha)=-f(\alpha,\alpha)\Longrightarrow f(\alpha,\alpha)=0.$$

例 6 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上对称或反对称的双线性函数. α,β 是 V 中两个向量，如果 $f(\alpha,\beta)=0$，则称 α,β 正交. 再设 K 是 V 的一个真子空间，证明：对 $\xi\overline{\in}K$，必有 $0\neq\eta\in K+L(\xi)$ 使 $f(\eta,\alpha)=0$ 对所有 α 都成立.

证 (1) 设 f 是 V 上对称双线性函数，也是 K 上对称双线性函数.

若 f 限制在 K 上是退化的，则存在 K 中向量 $\beta\neq 0$，使 $\forall\alpha\in K$，有 $f(\beta,\alpha)=0$，故取 $\eta=\beta$ 即为所求.

若 f 限制在 K 上是非退化的，则由主要内容 3 定理 1 知，存在 K 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m$，使 $f(\alpha,\beta)$ 在这组基下满足

$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_i)=d_i\neq 0\quad(i=1,2,\cdots,m),$$
$$f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0\quad(i\neq j),$$

而 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m,\xi$ 线性无关，故可作为 $K+L(\xi)$ 的一个基. 取

$$\eta=-\frac{f(\xi,\varepsilon_1)}{d_1}\varepsilon_1-\frac{f(\xi,\varepsilon_2)}{d_2}\varepsilon_2-\cdots-\frac{f(\xi,\varepsilon_m)}{d_m}\varepsilon_m+\xi,$$

则 $\eta\neq 0,\eta\in K+L(\xi)$，且对任意 $\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_m\varepsilon_m\in K$，有

$$f(\eta,\alpha)=f\left(-\sum_{i=1}^{m}\frac{f(\xi,\varepsilon_i)}{d_i}\varepsilon_i+\xi,\sum_{j=1}^{m}k_j\varepsilon_j\right)$$

$$=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{f(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varepsilon}_i)}{d_i}k_jf(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)+\sum_{j=1}^{m}k_jf(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\alpha}_j)$$

$$=-\sum_{j=1}^{m}k_jf(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varepsilon}_j)+\sum_{j=1}^{m}k_jf(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0.$$

(2) 设 f 是 V 上反对称双线性函数，也是 K 上反对称双线性函数.

若 f 限制在 K 上是退化的，则同题(1).

若 f 限制在 K 上是非退化的，则 K 必是偶数维的. 由 $\boldsymbol{\xi}\notin K$ 知，$K+L(\boldsymbol{\xi})$ 的维数是奇数，于是 f 限制在 $K+L(\boldsymbol{\xi})$ 上是退化的. 从而必存在 $\boldsymbol{\eta}\in K+L(\boldsymbol{\xi})$，使对于所有 $\boldsymbol{\alpha}\notin K+L(\boldsymbol{\xi})$ 有 $f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})=0$，所以 $\forall\boldsymbol{\alpha}\in K$，也有 $f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})=0$.

例 7 设 V 与 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 同上例，K 是 V 的一个子空间，令

$$K^{\perp}=\{\boldsymbol{\alpha}\in V\mid f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\ \forall\boldsymbol{\beta}\in K\},$$

(1) 试证 $K^{\perp}$ 是 V 的子空间($K^{\perp}$ 称为 K 的正交补)；

(2) 试证，若 $K\cap K^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$，则 $V=K+K^{\perp}$.

证 (1) $\forall\boldsymbol{\gamma}\in K$，因为

$$f(\mathbf{0},\boldsymbol{\gamma})=f(0\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0,\quad \boldsymbol{\alpha}\in V,$$

所以 $\mathbf{0}\in K^{\perp}$，$K^{\perp}$ 非空.

又对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in K^{\perp}$，$k\in\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{\gamma}\in K$，因为

$$f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=0,$$

$$f(k\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\gamma})=kf(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0,$$

所以 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\in K^{\perp}$，$k\boldsymbol{\alpha}\in K^{\perp}$，$K^{\perp}$ 是 V 的子空间.

(2) 设 K 是 V 的真子空间，$K+K^{\perp}\subseteq V$ 是显然的. 反之，任取 $\boldsymbol{\xi}\in V$，若 $\boldsymbol{\xi}\in K$，则 $\boldsymbol{\xi}\in K+K^{\perp}$. 若 $\boldsymbol{\xi}\notin K$，则由上例知，存在 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\eta}\in K+L(\boldsymbol{\xi})$，使 $f(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\alpha})=0\quad(\boldsymbol{\alpha}\in K)$，即 $\boldsymbol{\eta}\in K^{\perp}$. 又由 $\boldsymbol{\eta}\in K+L(\boldsymbol{\xi})$ 知，$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\beta}+k\boldsymbol{\xi}\quad(\boldsymbol{\beta}\in K,k\in P)$. 从而知 $k\neq0$，否则 $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，矛盾. 于是

$$\boldsymbol{\xi}=\frac{1}{k}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\beta})\in K+K^{\perp}.$$

所以 $V\subseteq K_1+K^{\perp}$.

综上即知 $V=K+K^{\perp}$.

例 8 设 $V,f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),K$ 同例 7,并设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 限制在 K 上是非退化的,试证 $V=K+K^{\perp}$ 的充要条件是 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 在 V 上是非退化的.

证 必要性 设 $V=K+K^{\perp}$, $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0,\boldsymbol{\beta}\in V$,又设 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\in K,\boldsymbol{\alpha}_2\in K^{\perp}$,则 $\forall\boldsymbol{\beta}\in K$,有

$$0=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta})+f(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}).$$

因为 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 在 K 上非退化,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}_2$. 又 $\forall\boldsymbol{\gamma}\in K^{\perp}$,由 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0$ 知,$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=0$,故 $\boldsymbol{\alpha}\in(K^{\perp})^{\perp}=K\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}\in K\cap K^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$,即得 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,从而知 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 在 V 上是非退化的.

充分性 设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 在 V 上是非退化的.

又设 $\boldsymbol{\alpha}_1\in K+K^{\perp}$,若 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$,则扩充 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 为 K 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$(设 $\dim K=m$). 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1\in K^{\perp}$,所以 $f(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_j)=0$ $(j=1,2,\cdots,m)$,即 f 在 K 上关于基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的度量矩阵第一行元素全为零,于是 f 在 K 上是退化的,导致矛盾. 故 $\boldsymbol{\alpha}_1=\mathbf{0}$,即 $K\cap K^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$,$V=K+K^{\perp}$.

例 9 设 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 是 n 维空间 V 上的非退化对称双线性函数,对 V 中一个元素 $\boldsymbol{\alpha}$,定义 V^* 中一个元素 $\boldsymbol{\alpha}^*$:$\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\beta}\in V$. 证明:(1) V 到 V^* 的映射 $\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}^*$ 是一个同构映射;

(2) 对 V 的每组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,有 V 的唯一的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1',\boldsymbol{\varepsilon}_2',\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n'$,使 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j')=\delta_{ij}$;

(3) 若 V 是复数域上 n 维线性空间,则有一组基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_n$,使 $\boldsymbol{\eta}_i=\boldsymbol{\eta}_i'$ $(i=1,2,\cdots,n)$.

证 (1) 因为存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,使

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_i)=d_i\neq0,\quad f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j).$$

由 $\boldsymbol{\varepsilon}_i^*(\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\beta})$ 作出相应 $\boldsymbol{\varepsilon}_1^*,\boldsymbol{\varepsilon}_2^*,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n^*\in V^*$,对于

$$k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^*+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^*+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^*=\mathbf{0},$$

有
$$\begin{aligned}0&=(k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^*+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^*+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^*)(\boldsymbol{\varepsilon}_i)\\&=k_1\boldsymbol{\varepsilon}_1^*(\boldsymbol{\varepsilon}_i)+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2^*(\boldsymbol{\varepsilon}_i)+\cdots+k_n\boldsymbol{\varepsilon}_n^*(\boldsymbol{\varepsilon}_i)\end{aligned}$$

$$=k_1 f(\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_i)+k_2 f(\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_i)+\cdots+k_n f(\boldsymbol{\varepsilon}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_i)$$

$$=k_i d_i,$$

所以 $k_i=0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 故 $\boldsymbol{\varepsilon}_1^*, \boldsymbol{\varepsilon}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n^*$ 线性无关,是 V^* 的一组基,即知 $\boldsymbol{\alpha}\to\boldsymbol{\alpha}^*$ 将基映为基,且为双射.

对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in V, k\in P$,存在

$$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})^*(\boldsymbol{\gamma})=f(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})+f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma})$$

$$=\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\gamma})+\boldsymbol{\beta}^*(\boldsymbol{\gamma})=(\boldsymbol{\alpha}^*+\boldsymbol{\beta}^*)(\boldsymbol{\gamma}),$$

$$(k\boldsymbol{\alpha})^*(\boldsymbol{\gamma})=f(k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=kf(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma})=k\boldsymbol{\alpha}^*(\boldsymbol{\gamma})=(k\boldsymbol{\alpha}^*)(\boldsymbol{\gamma}).$$

(2) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n^*$ 是 V 中基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 的对偶基,则由题(1)知,有

$$\boldsymbol{\alpha}_i\to\boldsymbol{\alpha}_i^*, \quad \boldsymbol{\alpha}_i\in V \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

则
$$f(\boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j)=\boldsymbol{\alpha}_i^*(\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

设
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0},$$

则
$$0=f(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_i)$$

$$=k_1 f(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_i)+k_2 f(\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_i)+\cdots+k_n f(\boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_i)$$

$$=k_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

所以,$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,是 V 的一组基. 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_i'=\boldsymbol{\alpha}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$,即得所求.

(3) 对于复数域上的 n 维线性空间,必存在 V 中的一组基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$,使 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 在这组基上的度量矩阵为单位矩阵 $\boldsymbol{E}_n$. 取 $\boldsymbol{\eta}_i'=\boldsymbol{\eta}_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$. 可得

$$f(\boldsymbol{\eta}_i, \boldsymbol{\eta}_j)=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

例 10 设 V 是对于非退化对称双线性函数 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ 的 n 维准欧氏空间,V 的一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_n$ 如果满足

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i)=1 \quad (i=1,2,\cdots,p),$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i)=-1 \quad (i=p+1,\cdots,n),$$

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_j)=0 \quad (i\neq j),$$

则称它为 V 的一组正交基.若 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 满足

$$f(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,$$

则称 $\mathscr{A}$ 为 V 的一个**准正交变换**.试证：

(1) 准正交变换是可逆的，且逆变换也是准正交变换；

(2) 准正交变换的乘积仍是准正交变换；

(3) 准正交变换的特征值等于 1 或 -1；

(4) 准正交变换在正交基下的矩阵 T 满足

$$\boldsymbol{T}\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{bmatrix}\boldsymbol{T}'=\begin{bmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{bmatrix}.$$

证 (1)若 $\mathbf{0}\neq\boldsymbol{\alpha}\in V$，则由 f 是非退化对称双线性函数知，存在 $\boldsymbol{\beta}\in V$ 使 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq 0$.

设 $\mathscr{A}$ 是准正交变换，则 $f(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\beta}))=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})\neq 0$，从而 $\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha})\neq\mathbf{0}$，故 $\mathscr{A}$ 为单射.又因为 V 是有限维的，所以 $\mathscr{A}$ 又为满射，从而 $\mathscr{A}$ 是可逆变换.

设 $\mathscr{A}^{-1}$ 是 $\mathscr{A}$ 的逆变换，$\mathscr{A}^{-1}$ 仍是线性的，且对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，有

$$f(\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}^{-1}(\boldsymbol{\beta}))=f(\mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\alpha}),\quad \mathscr{A}(\mathscr{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}))=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

所以 $\mathscr{A}^{-1}$ 是准正交变换.

(2) 设 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 是 V 的两个准正交变换，则 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 仍是 V 的线性变换.因为，对于任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V$，

$$f((\mathscr{A}\mathscr{B})\boldsymbol{\alpha},(\mathscr{A}\mathscr{B})\boldsymbol{\beta})=f(\mathscr{A}(\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\mathscr{B}\boldsymbol{\beta}))=f(\mathscr{B}\boldsymbol{\alpha},\mathscr{B}\boldsymbol{\beta})=f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

所以 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是准正交变换.

(3) 由于 f 是非退化对称双线性函数，故必存在 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$，使

$$f(\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j)=\begin{cases}d_i\neq 0, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

设 λ 为 $\mathscr{A}$ 的任一特征值，对应特征向量

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n\neq\mathbf{0},$$

则 $$f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=f(\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathscr{A}(\boldsymbol{\alpha}))=f(\lambda\boldsymbol{\alpha},\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda^2 f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}),$$

但 $f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=k_1^2d_1^2+k_2^2d_2^2+\cdots+k_n^2d_n^2\neq 0$，从而 $\lambda^2=1$，得 $\lambda=\pm1$.

(4) 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组正交基.

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=\begin{cases}1 & (i=j=1,2,\cdots,p),\\ -1 & (i=j=p+1,\cdots,n),\\ 0 & (i\neq j),\end{cases}$$

且 $$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)=(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)\boldsymbol{T}.$$

设 $\boldsymbol{T}=(t_{ij})_{n\times n}$，则由 $f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)$ 的表示式得

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i)=t_{1i}\boldsymbol{\varepsilon}_1+t_{2i}\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+t_{ni}\boldsymbol{\varepsilon}_n,$$

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)&=f(\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_i),\mathscr{A}(\boldsymbol{\varepsilon}_j))=f\Big(\sum_{k=1}^{n}t_{ki}\boldsymbol{\varepsilon}_k,\ \sum_{l=1}^{n}t_{lj}\boldsymbol{\varepsilon}_l\Big)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}t_{ki}t_{lj}f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)\\ &=t_{1i}t_{1j}+t_{2i}t_{2j}+\cdots+t_{pi}t_{pj}-t_{p+1\,i}t_{p+1\,j}-\cdots-t_{ni}t_{nj},\end{aligned}$$

即 $$\begin{cases}t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{pi}^2-t_{p+1\,i}^2-\cdots-t_{ni}^2=1 & (i=1,2,\cdots,p),\\ t_{1i}^2+t_{2i}^2+\cdots+t_{pi}^2-t_{p+1\,i}^2-\cdots-t_{ni}^2=-1 & (i=p+1,\cdots,n),\\ t_{1i}t_{1j}+\cdots+t_{pi}t_{pj}-t_{p+1\,i}t_{p+1\,j}-\cdots-t_{ni}t_{nj}=0 & (i\neq j).\end{cases}$$

用矩阵形式表示即为

$$\boldsymbol{T}'\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_p & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-p}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_p & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{E}_{n-p}\end{bmatrix}.$$

例 11 证明：任何一个双线性函数都可以唯一地表为一个对称双线性函数与一个反对称双线性函数之和.

证 设 f 是线性空间 V 上的双线性函数，令

$$g(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{2}[f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})+f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})],$$

$$h(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{2}[f(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})-f(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})],\quad \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,$$

则 g 与 h 分别为 V 上对称与反对称的双线性函数，且 $f=g+h$.

设另有 $f=g_1+h_1$，其中 g_1 与 h_1 分别为对称与反对称的双线性函数，则 $g-g_1=h-h_1$，$g-g_1$ 是对称双线性函数，$h-h_1$ 是反对称双线性函数. 故

$$(g-g_1)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=(h_1-h)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$
$$(g-g_1)(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=(g-g_1)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\quad \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V,$$
$$(h_1-h)(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=-(h_1-h)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),$$

从而 $$(h_1-h)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=-(h_1-h)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}),\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in V.$$

即 $(h_1-h)(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=0\Longrightarrow h_1-h=0\Longrightarrow g-g_1=0$，

于是 $g=g_1$，$h=h_1$，唯一性得证.

第三节　辛　空　间

主要内容

1. 定义 1　设 V 是数域 P 上的线性空间，在 V 上定义了一个非退化双线性函数，则 V 称为**双线性度量空间**. 当 f 是非退化对称双线性函数时，V 称为 P 上的**正交空间**；当 V 是 n 维实线性空间，f 是非退化对称双线性函数时，V 称为**准欧氏空间**；当 f 是非退化反对称双线性函数时，V 称为**辛空间**. 定义有非退化双线性函数 f 的双线性空间记为 (V,f).

(1) 在辛空间 (V,f) 中一定能找到一组基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\boldsymbol{\varepsilon}_{-2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{-n}$ 满足

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_{-i})=1,\ 1\leqslant i\leqslant n,$$
$$f(\boldsymbol{\varepsilon}_i,\boldsymbol{\varepsilon}_j)=0,\ -n\leqslant i,\ j\leqslant n,\ i+j=0,$$

这样的基称为 (V,f) 的正交基. 辛空间是偶数维的.

(2) 任一 $2n$ 级非退化反对称矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可把数域 P 上 $2n$ 维空

间化为一个辛空间，且使 $\boldsymbol{K}$ 为 V 的某组基 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{e}_{-1},\boldsymbol{e}_{-2},\cdots,\boldsymbol{e}_{-n}$下的度量矩阵. 此辛空间在某组辛正交基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\boldsymbol{\varepsilon}_{-2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{-n}$下的度量矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}\\ -\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}_{2n\times 2n}.$$

故 $\boldsymbol{K}$ 合同 $\boldsymbol{J}$.

2. 两个辛空间(V_1,f_1)与(V_2,f_2)，若有从 V_1 到 V_2 的作为线性空间的同构 $\mathscr{K}$，满足

$$f_1(u,v)=f_2(\mathscr{K}(u),\mathscr{K}(v)),$$

则称 $\mathscr{K}$ 是(V_1,f_1)到(V_2,f_2)的**辛同构**.

辛空间(V,f)到自身的辛同构称为(V,f)上的**辛变换**. 辛变换的乘积与逆变换皆为辛变换.

设(V,f)是辛空间，$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V$，满足 $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$，则称 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 为**辛正交的**. 若 W 是 V 的子空间，则

$$W^{\perp}=\{\boldsymbol{u}\in V\mid f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w})=0,\ \forall\,\boldsymbol{w}\in W\},$$

$W^{\perp}$是 V 的子空间，称为 W 的**辛正交补空间**.

定理 1 设(V,f)是辛空间，W 是 V 的子空间，则

$$\dim W^{\perp}=\dim V-\dim W.$$

3. 定义 2 (V,f)是辛空间，W 是 V 的子空间. 若 $W\subseteq W^{\perp}$，则称 W 为(V,f)的**迷向子空间**；若 $W=W^{+}$，即 W 是极大的(按包含关系)迷向子空间，也称为**拉格朗日子空间**；若 $W\cap W^{\perp}=\{\boldsymbol{0}\}$，则称 W 为(V,f)的辛子空间.

若 U,W 是辛空间(V,f)的子空间，则有性质：

(1) $(W^{\perp})^{\perp}=W$；

(2) $U\subseteq W\Rightarrow W^{\perp}\subseteq U^{\perp}$；

(3) 若 U 是辛子空间，则 $V=U\oplus U^{\perp}$；

(4) 若 U 是迷向子空间，则 $\dim U\leqslant\frac{1}{2}\dim V$；

(5) 若 U 是拉格朗日子空间，则 $\dim U\leqslant\frac{1}{2}\dim V$.

定理 2 设 L 是辛空间 (V,f) 的拉格朗日子空间，$(\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n)$ 是 L 的基，则它可扩充为 (V,f) 的辛正交基.

推论 设 W 是 (V,f) 的迷向子空间，$\{\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ 是 W 的基，则它可扩充为 (V,f) 的辛正交基.

对于辛子空间 U，$f|U$ 与 $f|U^{\perp}$ 都是非退化的.

定理 3 辛空间 (V,f) 的辛子空间 $(U,f|U)$ 的一组辛正交基可扩充为 (V,f) 的辛正交基.

定理 4 令 (V,f) 为辛空间，U 和 W 是两个拉格朗日子空间或两个同维数的辛子空间，则有 (V,f) 的辛变换把 U 变成 W.

辛空间 (V,f) 的两个子空间 U 及 W 之间的（线性）同构 $\mathscr{K}$ 若满足

$$f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=f(\mathscr{K}(\boldsymbol{u}),\mathscr{K}(\boldsymbol{v})),\ \forall\,\boldsymbol{u}\in W,\boldsymbol{v}\in V.$$

则称 $\mathscr{K}$ 为 V 与 W 间的等距.

4. Witt 定理 辛空间 (V,f) 的两个子空间 V,W 之间若有等距，则此等距可扩充为 (V,f) 的一个辛变换.

若 $\mathscr{K}$ 是辛空间 (V,f) 上的辛变换，则 $\mathscr{K}$ 的行列式为 1.

若 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n,\boldsymbol{\varepsilon}_{-1},\boldsymbol{\varepsilon}_{-2},\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_{-n}$ 是 (V,f) 的辛正交基，$\mathscr{K}$ 在该基下的矩阵为 $\boldsymbol{K}$，则有 $\boldsymbol{K}'\boldsymbol{J}\boldsymbol{K}=\boldsymbol{J}$.

5. 定理 5 设 $\mathscr{K}$ 是 $2n$ 维辛空间中的辛变换，$\boldsymbol{K}$ 是 $\mathscr{K}$ 在某辛正交基下矩阵，则它的特征多项式 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{K}|$ 满足 $f(\lambda)=\lambda^{2n}f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. 若设

$$f(\lambda)=a_0\lambda^{2n}+a_1\lambda^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}\lambda+a_{2n},$$

则
$$a_i=a_{2n-i}\quad(i=0,1,\cdots,n).$$

定理 6 设 λ_i,λ_j 是数域 P 上辛空间 (V,f) 上辛变换 $\mathscr{K}$ 在 P 中的特征值，且 $\lambda_i\lambda_j\neq1$. 设 $V_{\lambda_i},V_{\lambda_j}$ 是 V 中对应于特征值 λ_i 及 λ_j 的特征子空间. 则 $\forall\,\boldsymbol{u}\in V_{\lambda_i},\boldsymbol{v}\in V_{\lambda_j}$，有 $f(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=0$，即 V_{λ_i} 与 V_{λ_j} 是辛正交的. 特别地，当 $\lambda_i\neq\pm1$ 时 V_{λ_i} 是迷向子空间.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等代数内容、方法与技巧
作者＝孙清华　　孙昊　　李金兰
页数＝４４８
ＳＳ号＝１１７６１４３３
出版日期＝２００６年０８月第１版

前言
目录